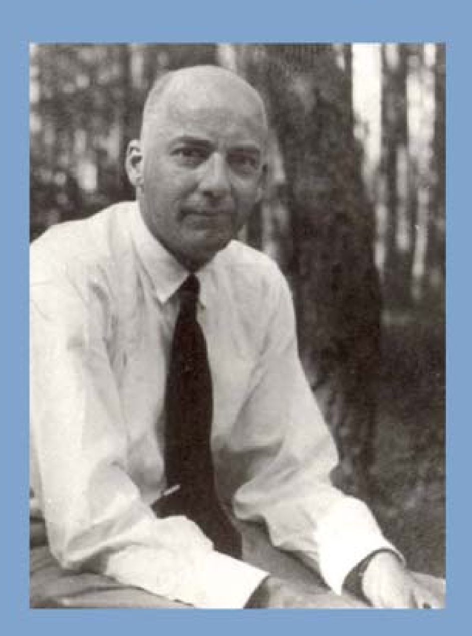
Helmut Hasse und Emmy Noether
Die Korrespondenz 1925–1935

Herausgegeben und kommentiert von
Franz Lemmermeyer und Peter Roquette





Helmut Hasse and Emmy Noether
Their Correspondence 1925–1935

Edited and commented by
Franz Lemmermeyer and Peter Roquette

With an Introduction in English

Universitätsverlag Göttingen

Franz Lemmermeyer und Peter Roquette

Helmut Hasse und Emmy Noether

erschienen im Universitätsverlag Göttingen 2006

Franz Lemmermeyer und Peter Roquette

Helmut Hasse und Emmy Noether

Die Korrespondenz 1925-1935



Universitätsverlag Göttingen
2006

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Kontakt / Contact

Franz Lemmermeyer
Universität Bilkent, Ankara
franz@fen.bilkent.edu.tr

Peter Roquette
Universität Heidelberg
roquette@uni-hd.de

Abbildungsnachweis:

Titelabbildung und Abbildung S. 23 Emmy Noether 1882 - 1935.
Fotografien aus Privatbesitz.

Titelabbildung und Abbildung S. 45 Helmut Hasse 1898 - 1979.
Fotografien aus Privatbesitz.

Postkarte auf S. 70-71 sowie Brief auf S. 75 Nachlass Helmut Hasse, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen,

Signatur: Cod. Ms. H. Hasse 1:1203 A Bl. 11r, Bl. 15r+v

Umschlaggestaltung: Margo Bargheer

ISBN 3-938616-35-0

Inhalt

Introduction

This book contains the full text of all letters which had been exchanged between Emmy Noether and Helmut Hasse, as they are preserved in the *Handschriftenabteilung* of the Göttingen University Library. There are 82 such letters, dated from 1925 until Noether's sudden and tragic death in 1935.

The name of one of the correspondents, **Emmy Noether** (1882–1935), is known throughout the worldwide mathematical community. She has been said to be

- "*the creator of a new direction in algebra*",
- "*the greatest woman mathematician who ever lived*".[1]

These are only some of the attributes which have meanwhile been bestowed upon her in so many articles and speeches. A number of scientific institutions and projects carry her name as an icon. There is a serious Noether literature trying to understand and evaluate her impact on the development of mathematics up to the present time. In the course of time her "*new direction in algebra*" has become standard not only in algebra but also in general mathematical thinking, namely to work with mathematical *structures*, these structures being based on *abstract axioms.* In a way our book can be viewed as part of this Noether literature, presenting a new and unique collection of *Noetheriana*. These Hasse - Noether letters are packed with mathematics, and they throw new light on how Emmy Noether arrived at her ideas and how she conveyed them to her peers. Through her open, unconventional and impulsive style, she allows us to have a glimpse not only into the working of her brain but also into her heart.

The other correspondent, **Helmut Hasse** (1898–1979), is known to the general mathematical public mainly through his *Local-Global Principle*. He has been said to be

- "*one of the most important mathematicians of the twentieth century*",

[1] Cited from Alexandrov's address in memory of Emmy Noether, in Moscow on September 5, 1935, reprinted in English translation in the Collected Papers of Emmy Noether.

- "*a man whose accomplishments spanned research, mathematical exposition, teaching and editorial work*".[2]

The main field of Hasse's research was Number Theory. Apart from the already mentioned Local-Global Principle (for quadratic forms and for algebras) he contributed substantial results to class field theory (explicit reciprocity laws, norm theorem, local class field theory, complex multiplication), the theory of algebraic function fields (in particular with finite base fields where he succeeded to prove the Riemann hypothesis for elliptic curves). He wrote several successful and seminal books.

From what we have said above, it may seem that these two mathematicians, Hasse and Noether, had somewhat different motivations and aims in their mathematical work. Whereas Hasse is remembered for his great *concrete results* in Number Theory, Emmy Noether's main claim to fame is not so much the theorems she proved but her *methods.* She herself has described her methods in one of her letters to Hasse (English translation): "*My methods are working and conceptual methods and therefore have spread everywhere*".[3]

But on the other hand, their letters show that there existed a mutual understanding on the basic intellectual foundations of mathematical work (if not to say of its "philosophy"). Both profited greatly from their contact. We see that not only did Hasse absorb Emmy's ideas on what was called "Modern Algebra" at that time, but conversely she became interested in the foundation of class field theory, to which she then contributed by proposing to use non-commutative arithmetic as a powerful tool. In the course of time there arose a close cooperation of the two, and also a friendship as is evidenced from the tone of their letters.

Accordingly this book is to be regarded as a contribution not only to the literature on Noether but also to the literature on Hasse.

Unfortunately, the Hasse - Noether correspondence is preserved on one side only, i.e., the letters from Noether to Hasse. The letters in the other direction, i.e., from Hasse to Noether, are probably lost – except for three letters of which Hasse had made a copy for himself. Thus the Hasse - Noether correspondence, as available today, consists of 79 letters from Noether to Hasse and only 3 letters from Hasse to Noether. For some time we have tried to locate the missing letters from Hasse to Noether. It is said that after her sudden death 1935 in Bryn Mawr, Noether's legacy had been put into a container and sent to her brother Fritz who was living in Tomsk in Siberia at that time. But apparently that container never arrived. And meanwhile we have found a letter from Fritz Noether to Hasse, dated October 2, 1935, from which we conclude that in all probability there are no more papers of his sister that have been preserved. We have included Fritz Noether's letter in our collection.

[2] Cited from the Hasse-article by H. Edwards in the *Dictionary of Scientific Biography*, New York 1970-1990.

[3] The German text can be found in the last paragraph of the letter of November 12, 1931 and reads: "*Meine Methoden sind Arbeits- und Auffassungsmethoden, und daher anonym überall eingedrungen.*" We are not sure whether our translation of "*Arbeits- und Auffassungsmethoden*" faithfully reflects Noether's intentions but we have found no alternative.

Because of the lost Hasse letters, many parts of Noether's text which refer to his letters seem incomprehensible on first sight. However we have been able, by using other sources, to clear up most of the doubtful passages. Accordingly we have supplemented Noether's letters by detailed comments. In these comments we not only provide explanations in the technical sense but we also try to describe, as to our present knowledge, the mathematical environment of Noether and that of Hasse, the mathematical tendencies of the time, and what was going on parallel to Hasse–Noether, as far as it is relevant to the text of the letters. Our comments appear immediately after the transcription of the respective letter. They are given in the language of Hasse and Noether, i.e., in German. We have abstained from translating the Hasse–Noether letters. In our opinion, the impulsive and unmistakable distinctive style of Emmy Noether can best be appreciated in her original language. Nevertheless, if there is some demand then we may offer English translations some time in the future.

As already said, all of the Hasse–Noether letters (and postcards, respectively) are packed with mathematics. The correspondence partners did not only inform each other about their final results, but they also freely exchanged mathematical ideas and speculations, even when these could not yet be formulated in a precise manner, or when a convincing reason was still lacking. Noether called them "fantasies"; we would perhaps say "visions". Some of these visions have become reality and today belong to the basics of mathematics. Others have turned out not to be sustainable and had to be revised or abandoned. The Hasse–Noether correspondence is a rich source for those who are interested in the rise and the development of mathematical notions and ideas.

Not all the results and projects of Hasse or of Noether are touched in their correspondence. Their letters are restricted to those topics which were close to their common interest. These include:

- Axiomatic algebra,
- Class field theory ,
- Algebras and their arithmetics,
- Function fields.

In the 1920s and 1930s, those areas witnessed a particularly strong development whose effects can still be felt today. Emmy Noether and Helmut Hasse belonged to the outstanding protagonists of that development. From this viewpoint, the Hasse–Noether correspondence appears as a first rate historical document.

The exchange of letters between Hasse and Noether started in January 1925. At that time Hasse was 26 and held a position of *Privatdozent* at the University of Kiel. He had studied with Kurt Hensel in Marburg, and now strongly promoted the use of Hensel's p-adic numbers in Number Theory. While in Kiel, Hasse had started a lively correspondence with Emil Artin in Hamburg, on explicit reciprocity laws and other topics of algebraic number theory; this continued until 1934. (The correspondence file of Artin–Hasse will be published some time in the future.) In 1924 Hasse had delivered a lecture course on class field theory in Kiel, of which there were lecture notes written by Reinhold Baer. Hasse's aim was to simplify and

streamline the foundations of class field theory. In September 1925 he would deliver, at the meeting of the German Mathematical Society in Danzig, his famous survey on class field theory which finally led to his 3-volume class field theory report. In April 1925 Hasse would be appointed full professor at the University of Halle. It appears that he became the youngest professor at German universities at the time.

Emmy Noether had come to Göttingen in 1915, and in 1925 she held a position as *Privatdozent* with the official title of *Außerordentlicher Professor* (=associate professor; this title did not carry a salary; she never was promoted in Göttingen). In 1925 she could already look back on a successful mathematical career, in the sense that she had become a respected and highly valued member of the mathematical community. Originally she had worked under the influence of Hilbert and Klein, and her papers on differential invariants have become classic. In 1921 her seminal paper on ideal theory had appeared, where she had introduced and studied what today are called "Noetherian rings" on an axiomatic basis; more precisely: she had shown that in a commutative ring the various decomposition laws of ideals into primary ideals (which were well known for polynomial rings) can be obtained solely under the assumption that every ideal admits a finite basis. With this paper she started her own "*completely original mathematical path*" (Alexandrov) into abstract algebra. At the meeting of the German Mathematical Society 1924 in Innsbruck she had presented the axiomatic basis for the factorization of ideals into prime ideals (known for rings of integers in an algebraic number field). Today those rings are called "Dedekind rings". Hasse was in attendance at that lecture and it left a great impression on him. In September 1925 she would deliver, at the meeting of the German Mathematical Society, her talk in which she outlined her ideas how to do representation theory, namely in the framework of the theory of abstract algebras. (This was at the same meeting and even in the same section in which Hasse delivered his survey on class field theory.)

In the first period of their correspondence, from 1925–1927, the topics of their letters do not seem to be particularly remarkable. They discussed Hasse's attempt to obtain an axiomatic description of unique factorization domains, there was some discussion of a possible axiomatic foundation of class field theory, and there were Noether's comments on how to present Galois theory in a text book or in a lecture course.

In this first period the tone of Noether's letters sounds somewhat like from a teacher to her student: criticising and praising, passing good and not so good marks, encouraging and teaching. Noether, 16 years older than Hasse, was always ready to support young talents. We can observe that during this period, Hasse became quite interested in abstract axiomatic algebra as promoted by Emmy Noether.

This "teacher-student relationship" changed after 1927 when Noether had asked Hasse about the existence of certain cyclic number fields. Within a few days Hasse was able to provide her with the construction of those fields. These were to be minimal splitting fields of high degree for the quaternion algebra. In his construction Hasse used (among other tools) the Local-Global Principle for quadratic forms which he had discovered in his thesis. Emmy Noether was quite satisfied with Hasse's result. In a joint note with Richard Brauer on algebras and their splitting

fields, she referred to Hasse's construction; Hasse's own note appeared immediately thereafter. These two notes together contain the first instance where the Local-Global Principle for some algebra was established, namely for the quaternion algebra.

Subsequently Hasse became interested in the theory of algebras and their arithmetic, and on the other side Emmy Noether looked more closely into class field theory. In the following years there arose a close cooperation between Noether, Hasse and R. Brauer. As a result Hasse developed the arithmetic of algebras by introducing and studying algebras over local fields; this turned out to be a powerful tool also for the foundation of local class field theory – shortly after he had discovered local class field theory through his (global) theory of the norm residue symbol. At the end of 1930, Hasse ventured to formulate his conjectures about simple algebras over number fields, including their Local-Global Principle and the fact that they are all cyclic. Noether first did not believe in those conjectures but soon became convinced, and both started their quest for the proofs. This finally culminated in the famous Brauer-Hasse-Noether theorem, obtained at the end of 1931. This was an exciting year, and the excitement is mirrored in the Hasse–Noether correspondence.

Parallel to this we see the making of Noether's famous paper on integral bases for unramified extensions, we learn of her motivation, her aim and her ideas around it.

In this second period 1927–1931, Noether more and more addresses Hasse as a colleague and partner on equal terms.

In the third period, 1932–1935, we see from the letters the development of a heartfelt friendship. This starts with Hasse's letter to Noether on the occasion of her 50th birthday on March 23, 1932. In the University of Göttingen her birthday was not officially noticed, but Hasse had made sure that the algebraists in and outside of Göttingen were informed. As for himself, he dedicated to her his paper on the structure of the Brauer groups of number fields, including a proof of Artin's reciprocity law of class field theory by means of algebras. In Noether's reply, and in all her subsequent letters we see her heartfelt affection towards her younger colleague Hasse. Mathematically, the later letters contain the attempts to generalize class field theory from abelian to arbitrary Galois extensions. Although these attempts did not reach their goal, it is of interest that the ideas of Noether, as well as the ideas of Artin and Hasse, went in the direction of what today is called cohomology theory.

The friendship between Hasse and Emmy Noether stood its test in the hard times of summer 1933 when Hasse tried everything in his powers to keep Noether in Göttingen. It is well known that all this was in vain and she had to emigrate. But the friendly contact between Hasse and Noether continued, as we see in her letters from Bryn Mawr. As always, these letters were packed with mathematics. She never complained about her situation but we observe a sad undertone in her letters, reflecting Noether's wish to return to her beloved Göttingen – the place which she had become used to consider as her home, where she had started her mathematical career and where she had risen to the height of her power.

We have included in this book 14 additional letters which, after the sudden death of Emmy Noether in April 1935, Hasse had exchanged with Hermann Weyl, Richard Brauer and Fritz Noether.

The transcription of the Noether letters turned out to be quite difficult, not only because Emmy used the old German handwriting of the 19th century, but also because of her really original style and her impulsive way of expressing herself. Most of the time she uses mathematical symbols without explanation, under the assumption (which was probably justified) that her correspondence partner will be able to find out what is going on. Formulas and diagrams are condensed to tiny spaces on postcards with much additional text, which often is hardly decipherable. Except for some very few isolated spots we were finally able to read everything. Sometimes we wondered how Hasse has managed to deal with her writing.

For the convenience of the reader we have included in the book a list of names, a list of mathematical terms, and a list of literature. Moreover, there is an appendix with short biographic sketches for all persons who are mentioned in this book. Whenever possible we have added references to more detailed biographical sources.

As to our two protagonists, Helmut Hasse and Emmy Noether, we have refrained from including biographies since, after all, the relevant data can be readily found in the literature. (See, e.g., our bibliography.) Instead, as an introduction to their world of ideas we have included two articles written by contemporaries. These are, first, van der Waerden's obituary for Emmy Noether and, second, Leopoldt's address on the occasion of Hasse's 50th anniversary of his doctorate. The two authors belong to the leading mathematicians of their time. What is more, each of them, in some period of his mathematical life, had been a disciple of his protagonist: Van der Waerden of Emmy Noether and Leopoldt of Hasse. So both were acquainted at first hand with the mathematical viewpoints and philosophy of their mentor. They also had close personal contacts to her/him. Their articles, although written in different times and under different circumstances, show not only competence but also a warm attachment which makes them the more valuable as contemporary witnesses for the influence of Noether's and of Hasse's personalities. Thus these articles themselves have become important historical documents.

Remark: In 1970, on the occasion of the 35th year after Emmy Noether's death, there appeared the short and empathetic biography of Emmy Noether by Auguste Dick. By looking through the pages of that biography one finds a number of citations from Noether's letters to Hasse. We conclude that Auguste Dick had access to those letters. But in 1970 Hasse was still alive; at that time the Hasse legacy was not yet in the Göttingen library. So it seems that Dick had established personal contact to Hasse and that he had shown her the letters. In fact, in the meantime we have found a letter from Auguste Dick to Hasse, dated September 7, 1967 where we read (English translation):

> "*Respected Herr Professor, your mailing has surprised me and at the same time made me very happy. I do not know how to thank you. Already while preliminarily browsing through the 85 documents I have found much material which is quite important to me . . . May I ask you to let me have those valuable documents until the beginning of November?. . .*"

We see that Hasse had sent her the whole collection of his correspondence with Emmy Noether. (And he had sent the originals, for at that time the Xerox copy method was not as familiar as it is today.) Thus all the letters which are published in this volume have already been in the hands of Auguste Dick. But apparently the possibility of publishing *all* the letters was *not* discussed between Hasse and Dick, when they met in November 1967. She only asked for permission to cite those pieces of the text which we now can read in her book. And Hasse granted this. Thus the Hasse–Noether letters had to wait 35 more years for their complete publication.

Acknowledgements: We are grateful to Günther Frei for a number of valuable discussions and comments. We would like to thank Thomas Olschewski for his active and very welcome help in the transcription and the construction of the file for publication. Patrick Morton has read the introduction and been of help to streamline our English. Last but not least we are glad to report that the *Deutsche Forschungsgemeinschaft* has supported our work; without it this volume would not have been possible.

Note: All the letters from which we are citing in this book are contained in the Hasse legacy at the *Handschriftenabteilung* of the University Library in Göttingen (Cod. Ms. H. Hasse) – except when we explicitly refer to another source. The cited letters from Hasse to Davenport are contained in the Davenport legacy at Trinity College, Cambridge, England. The cited letters from Hasse to R. Brauer are contained in the Brauer legacy which is now at the *Handschriftenabteilung* in Göttingen too.

Ankara and Heidelberg, January 2006

Franz Lemmermeyer, Peter Roquette

Van der Waerden über Emmy Noether

Aus: *Mathematische Annalen, Band 111 (1935)*

Nachruf auf Emmy Noether

B. L. van der Waerden in Leipzig

Ein tragisches Geschick hat unserer Wissenschaft eine höchst bedeutsame, völlig einzigartige Persönlichkeit entrissen. Unsere treue Annalen-Mitarbeiterin Emmy Noether ist am 14. April 1935 an den Folgen einer Operation gestorben. Geboren war sie in Erlangen am 23. März 1882 als Tochter des bekannten Mathematikers Max Noether.

Ihre absolute, sich jedem Vergleich entziehende Einzigartigkeit ist nicht in der Art ihres Auftretens nach außen hin zu erfassen, so charakteristisch dieses zweifellos war. Ihre Eigenart erschöpft sich auch keineswegs darin, daß es sich hier um eine Frau handelt, die zugleich eine hochbegabte Mathematikerin war, sondern liegt in der ganzen Struktur dieser schöpferischen Persönlichkeit, in dem Stil ihres Denkens und dem Ziel ihres Wollens. Da nun dieses Denken in erster Linie ein mathematisches Denken und das Wollen in erster Linie auf wissenschaftliche Erkenntnis gerichtet war, so müssen wir zuerst ihr mathematisches Schaffen analysieren, wenn wir ihre Persönlichkeit einigermaßen erfassen wollen.

Die Maxime, von der sich Emmy Noether immer hat leiten lassen, könnte man folgendermaßen formulieren: *Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operationen werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objekten losgelöst und auf allgemeine begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt sind.* Dieser Leitsatz war für sie nicht etwa ein Ergebnis ihrer Erfahrung über die Tragweite wissenschaftlicher Methoden, sondern ein apriorisches Grundprinzip ihres Denkens. Sie konnte keinen Satz, keinen Beweis in ihren Geist aufnehmen und verarbeiten, ehe er nicht abstrakt gefaßt und

dadurch für ihr Geistesauge durchsichtig gemacht war. Sie konnte nur in Begriffen, nicht in Formeln denken, und darin lag gerade ihre Stärke. Sie wurde so durch ihre eigene Wesensart dazu gezwungen, diejenigen Begriffsbildungen ausfindig zu machen, die geeignet waren, als Träger mathematischer Theorien aufzutreten.

Als Material für diese Denkmethode boten sich ihr die Algebra und die Arithmetik dar. Als grundlegend erkannte sie die Begriffe Körper, Ring, Ideal, Modul, Restklasse und Isomorphismus. Das Vorbild aber für ihre begrifflichen Entwicklungen fand sie in erster Linie in der Dedekindschen Modultheorie, aus der sie immer neue Ideen und Methoden zu schöpfen wußte und deren Anwendungsgebiet sie nach jeder Richtung hin erstaunlich erweitert hat.

Von der Gordanschen Invariantentheorie ist sie ausgegangen. Ihre Dissertation [1], mit der sie 1907 in Erlangen promovierte, behandelt das Problem, die von Gordan für das binäre und ternäre Gebiet ausgebildeten Methoden auf das n-äre Gebiet zu übertragen. Von den n-ären Reihenentwicklungen der Invariantentheorie hat sie später noch schöne Anwendungen gegeben [4,N12].

Sehr bald jedoch kommt sie in den Bann der Hilbertschen Methoden und Fragestellungen. Dem Hilbertschen Problemkreise gehören ihre Endlichkeitsbeweise für Invarianten endlicher Gruppen [3] und für ganzzahlige Invarianten binärer Formen an. Ihre wichtigste Arbeit aus dieser Periode ist die über Körper und Systeme rationaler Funktionen [2], in welcher sie durch Kombination der Methoden der Hilbertschen Endlichkeitsbeweise mit denen der Steinitzschen Körpertheorie die Existenz einer endlichen Rationalbasis für jedes System von rationalen Funktionen von n Veränderlichen beweist. Auf Grund davon löst sie einen Teil des Hilbertschen Problems der relativganzen Funktionen. Mit den Methoden derselben Arbeit [2] liefert sie dann auch einen wesentlichen Beitrag — den wichtigsten, der bisher überhaupt erzielt wurde — zum Problem der Konstruktion von Gleichungen mit vorgegebener Gruppe [7].

Während des Krieges kam Emmy Noether nach Göttingen, wo sie sich 1919 habilitierte und bald darauf einen Lehrauftrag erhielt. Unter dem Einfluß von Klein und Hilbert, die sich in dieser Zeit beide sehr mit der allgemeinen Relativitätstheorie beschäftigten, kamen ihre Arbeiten über Differentialinvarianten [8,9] zustande, welche für dieses Gebiet von großer Wichtigkeit geworden sind. Sie zeigt in ihnen zum ersten Male die allgemeinen Methoden auf, die zur Erzeugung sämtlicher Differentialinvarianten geeignet sind. In der ersten Arbeit wird der fundamentale Begriff des Reduktionssystems geprägt: eines Systems von Differentialinvarianten, von denen alle übrigen algebraische Invarianten sind. In der zweiten werden die Methoden der formalen Variationsrechnung zur Bildung von Differentialinvarianten herangezogen.

Das Studium der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen [10] machte sie näher mit der Dedekindschen Modul- und Idealtheorie bekannt, welche Bekanntschaft für ihr weiteres Schaffen richtunggebend werden sollte. In der gemeinsamen Arbeit mit Schmeidler [13] werden die modultheoretischen Begriffe: Direkte Summen- und Durchschnittsdarstellung, Restklassenmoduln und Modulisomorphie entwickelt und erprobt, welche sich wie rote Fäden durch ihr späteres Werk ziehen. Hier werden auch zum ersten Male Eindeutigkeitsbeweise mit Hilfe

der Austauschmethode geführt und Durchschnittsdarstellungen auf Grund einer Endlichkeitsbedingung gewonnen.

Der erste große Erfolg dieser Methode wurde in der jetzt schon klassischen Arbeit von 1921 „Idealtheorie in Ringbereichen“ [15] erzielt. In ihr wird zunächst, nachdem die Begriffe Ring und Ideal definiert sind, aus dem Hilbertschen Satz von der endlichen Idealbasis eine äquivalente Endlichkeitsbedingung, der Teilerkettensatz, hergeleitet. Die Darstellung beliebiger Ideale als Durchschnitte von Primäridealen, die E. Lasker für den Fall des Polynombereichs mit den Hilfsmitteln der Idealtheorie erhalten hatte, wird als Folge des Teilerkettensatzes allein erkannt. Neben dem Begriff des Primärideals (einer abstrakten Fassung des Laskerschen Begriffs, zugleich Verallgemeinerung des Dedekindschen Begriffs des einartigen Ideals) wird der des irreduziblen Ideals geprägt, und mit den schon erwähnten Modulmethoden werden vier Eindeutigkeitssätze bewiesen.

Diese Arbeit bildet die unverrückbare Grundlage der heutigen „allgemeinen Idealtheorie“. Ihre Ergebnisse bedurften eines Ausbaus nach zwei verschiedenen Richtungen hin. Einmal galt es, die Eliminationstheorie der allgemeinen Idealtheorie unterzuordnen und die Nullstellentheorie der Polynomideale von diesem Standpunkte aus neu zu begründen. In ihrer Bearbeitung der Hentzeltschen Eliminationstheorie [17] und in zwei weiteren Arbeiten, [19] und [20], hat Emmy Noether mit diesem Problem gerungen; aber erst in ihren Vorlesungen 1923/24 gab sie der Lösung die endgültige Form. Es zeugt von ihrer Großzügigkeit, daß sie, als ich ein Jahr später im Anschluß an ihre Arbeiten dieselbe Begründung der Nullstellentheorie fand, mir die Publikation überlassen hat.

Das zweite Notwendige war die Herstellung der Beziehung der allgemeinen Idealtheorie zur klassischen Dedekindschen Idealtheorie der Hauptordnungen in Zahl- und Funktionenkörpern. Es galt die Bedingungen aufzustellen, die ein Ring erfüllen muß, damit jedes Ideal nicht nur Durchschnitt von Primäridealen, sondern Produkt von Primidealpotenzen wird. Auch diese Aufgabe wird vollständig gelöst [25]. Als wesentlich stellt sich dabei neben den Endlichkeitsbedingungen (Teiler- und Vielfachenkettensatz) die Bedingung der „ganzen Abgeschlossenheit“ heraus. Durch Übertragung der Endlichkeitsbedingungen auf endliche Erweiterungen eines Ringes kam sie gleichzeitig mit Hilfe ihrer älteren invariantentheoretischen Methode zu einem Endlichkeitssatz für modulare Invarianten [24]. Die großen idealtheoretischen Arbeiten [15] und [25] bilden den Ausgangspunkt einer langen Reihe ergebnisreicher Arbeiten, meistens von Emmy Noethers Schülern, über welche W. Krull in seinem Bericht „Idealtheorie“ (Ergebn. Math. 4, 3, 1935) zusammenfassend berichtet hat.

Inzwischen war Emmy Noether selbst schon mit einem weiteren Problemkreis beschäftigt. Dieselben Modulbegriffe, aus denen heraus sie die kommutative Idealtheorie entwickelt hatte, sollten ihre Kraft auch im Nichtkommutativen zeigen. Zunächst gelang es, die Darstellungstheorie der Gruppen und hyperkomplexen Systeme der Modultheorie unterzuordnen. Es entspricht nämlich jeder Darstellung eines Systems R durch lineare Transformationen eindeutig ein R-Modul, der *Darstellungsmodul*. Der Äquivalenzbegriff der Darstellungstheorie ordnet sich nunmehr dem Modul-Isomorphiebegriff unter; ebenso erweisen sich die Begriffe reduzibel, irreduzibel und vollständig reduzibel als modultheoretische Begriffe. Als zentrales

Theorem der Darstellungstheorie kristallisiert sich nun folgender Satz heraus: Jeder irreduzible R-Modul ist äquivalent einem Ideal des Ringes R.

Diese enge Verknüpfung von Darstellungstheorie, Modultheorie und Idealtheorie hat Emmy Noether schon ab 1924 in ihren Vorlesungen entwickelt (vgl. die Note [23]); sie liegt auch ihrer Diskriminantenarbeit [26] zugrunde. In voller Klarheit und Allgemeinheit wurde dieser Zusammenhang aber erst in der Göttinger Vorlesung von 1927/28 und in der daraus entstandenen Arbeit [29] erklärt. Diese enthält außerdem eine systematische Idealtheorie der hyperkomplexen Systeme, gipfelnd in dem Satz: Die halbeinfachen hyperkomplexen Systeme im Sinne von J. H. Maclagan-Wedderburn sind direkte Summen von einfachen Rechtsidealen; ihre Darstellungen sind ebenfalls vollständig reduzibel. Aus diesen Sätzen wird nun die ganze Frobeniussche Darstellungstheorie entwickelt und sogar verallgemeinert. Während nämlich die Frobeniussche Darstellungstheorie vom Körper der komplexen Zahlen ausging, gestattet die Noethersche Theorie, Darstellungen in beliebigen Körpern direkt zu behandeln. Es entstand nun die Frage nach den Beziehungen zwischen den Darstellungen in verschiedenen Körpern (die sogenannte arithmetische Theorie der Gruppen linearer Substitutionen), insbesondere die Frage nach den *Zerfällungskörpern*, in denen eine gegebene Darstellung in absolut-irreduzible zerfällt. In der Noetherschen Theorie ordnen sich diese Fragen der allgemeineren Frage nach der Struktur des Produktes von zwei einfachen hyperkomplexen Systemen unter, welche Frage sich wieder mit modultheoretischen Methoden erschöpfend beantworten ließ [35]. Dabei ergab sich insbesondere eine Charakterisierung der Zerfällungskörper einer Divisionsalgebra als maximale kommutative Unterkörper der Algebra selbst oder eines vollen Matrixringes über dieser Algebra [27]. Diese Einbettung der Zerfällungskörper gibt gleichzeitig einen tiefen Einblick in die Struktur der Algebra selbst: Diese läßt sich darstellen als „verschränktes Produkt“ des Zerfällungskörpers mit dessen Galoisscher Gruppe. (Die Noethersche Theorie der verschränkten Produkte ist dargestellt bei H. Hasse, Theory of cyclic algebras, Trans. Amer. Math. Soc 34, S. 180–200, sowie in dem Bericht von M. Deuring, Algebren, Ergebn. Math. 4, 1, S. 52–56.).

Der einfachste Fall des verschränkten Produktes ist die „zyklische Algebra“, die entsteht, wenn der Zerfällungskörper zyklisch und in der Algebra selbst eingebettet ist. Die Struktur einer solchen zyklischen Algebra hängt davon ab, ob gewisse Elemente des Grundkörpers Normen von Elementen des Zerfällungskörpers sind. Ist nun insbesondere der Grundkörper ein algebraischer Zahlkörper, so ist die Normentheorie der zyklischen Erweiterungen ein Gegenstand der Klassenkörpertheorie, welche in dieser Weise als eng mit der Algebrentheorie verknüpft erscheint [34]. Die weitere Auswertung dieser Verknüpfung durch Noether, H. Hasse, E. Brauer und C. Chevalley in ständiger Wechselwirkung führte einerseits zu einer Neubegründung gewisser Teile der Klassenkörpertheorie mit hyperkomplexen Methoden, andererseits auch zum Beweis eines lange vermuteten „Hauptsatzes der Algebrentheorie“, der besagt, daß jede Divisionsalgebra über einem algebraischen Zahlkörper zyklisch ist [33].

Die Betrachtung beliebiger verschränkter Produkte an Stelle der zyklischen Algebren ermöglichte schließlich die Übertragung von Sätzen der Klassenkörper-

theorie, insbesondere des „Hauptgeschlechtssatzes“, auf nichtabelsche Körper [36].

Mit der begrifflichen Durchdringung der Klassenkörpertheorie war ein Ziel erreicht, das Emmy Noether schon seit vielen Jahren, unbeirrt durch die Skepsis der Zahlentheoretiker, beharrlich anstrebte. Die Erreichung dieses Zieles war aber keineswegs ein Endpunkt ihrer Forschungen. Unermüdlich und über alle äußeren Umstände erhaben, schritt sie auf dem ihr durch ihre Begriffsbildungen gezeigten Wege fort. Auch als sie 1933 in Göttingen die Lehrberechtigung verlor und an die Frauenhochschule in Bryn Mawr (Pennsylvania) berufen wurde, wußte sie dort und in dem nahen Princeton in kurzer Zeit wieder eine Schule um sich zu sammeln. Ihre Forschung, die die kommutative Algebra, die kommutative Arithmetik und die nichtkommutative Algebra durchlaufen hatte, wandte sich jetzt der nichtkommutativen Arithmetik zu [37], wurde dann aber durch ihren Tod jäh abgebrochen.

Als charakteristische Wesenszüge haben wir gefunden: Ein unerhört energisches und konsequentes Streben nach begrifflicher Durchdringung des Stoffes bis zur restlosen methodischen Klarheit; ein hartnäckiges Festhalten an einmal als richtig erkannten Methoden und Begriffsbildungen, auch wenn diese den Zeitgenossen noch so abstrakt und unfruchtbar vorkamen; ein Streben nach Einordnung aller speziellen Zusammenhänge unter bestimmte allgemeine begriffliche Schemata.

Ihr Denken weicht in der Tat in einigen Hinsichten von dem der meisten anderen Mathematiker ab. Wir stützen uns doch alle so gern auf Figuren und Formeln. Für sie waren diese Hilfsmittel wertlos, eher störend. Es war ihr ausschließlich um Begriffe zu tun, nicht um Anschauung oder Rechnung. Die deutschen Buchstaben, die sie in typisch-vereinfachter Form hastig an die Tafel oder auf das Papier warf, waren für sie Repräsentanten von Begriffen, nicht Objekte einer mehr oder weniger mechanischen Rechnung.

Diese völlig unanschauliche und unrechnerische Einstellung war wohl auch eine der Hauptursachen der Schwierigkeit ihrer Vorlesungen. Sie hatte keine didaktische Begabung, und die rührende Mühe, die sie sich gab, ihre Aussprüche, noch bevor sie ganz zu Ende gesprochen waren, durch schnell gesprochene Zusätze zu verdeutlichen, hatte eher den umgekehrten Effekt. und doch: Wie unerhört groß war trotz allem die Wirkung ihres Vortrags! Die kleine, treue Hörerschar, meistens bestehend aus einigen fortgeschrittenen Studenten und häufig ebensovielen Dozenten und auswärtigen Gästen, mußte sich ungeheuer anstrengen, um mitzukommen. War das aber gelungen, so hatte man weit mehr gelernt als aus dem tadellosesten Kolleg. Es wurden fast nie fertige Theorien vorgetragen, sondern meistens solche, die erst im Werden begriffen waren. Jede ihrer Vorlesungen war ein Programm, und keiner freute sich mehr als sie selbst, wenn ein solches Programm von ihren Schülern ausgeführt wurde. Völlig unegoistisch und frei von Eitelkeit, beanspruchte sie niemals etwas für sich selbst, sondern förderte in erster Linie die Arbeiten ihrer Schüler. Sie schrieb für uns alle immer die Einleitungen, in denen die Leitgedanken unserer Arbeiten erklärt wurden, die wir selbst anfangs niemals in solcher Klarheit bewußt machen und aussprechen konnten. Sie war uns eine treue Freundin und gleichzeitig eine strenge, unbestechliche Richterin. Als solche war sie auch für die Mathematische Annalen von unschätzbarem Wert.

Wie schon erwähnt, fanden ihre abstrakten, unanschaulichen Begriffsbildungen anfangs wenig Anerkennung. In dem Maße, wie die Erfolge ihrer Methoden auch den anders eingestellten klar wurden, änderte sich das, und seit etwa acht Jahren kamen prominente Mathematiker des In- und Auslandes nach Göttingen, um ihren Rat zu holen und ihre Vorlesungen zu hören. 1932 erhielt sie mit E. Artin zusammen den Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis für Arithmetik und Algebra. Und heute scheint der Siegeszug der von ihren Gedanken getragenen modernen Algebra in der ganzen Welt unaufhaltsam zu sein.

Liste der Veröffentlichungen Emmy Noethers

[1] *Zur Invariantentheorie der Formen von n Variablen*, J. Reine Angew. Math. **130** (1911), S. 118–154; vgl. auch Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **19** (1910), S. 101–104

[2] *Körper und Systeme rationaler Funktionen*, Math. Annalen **78** (1916), S.161–191; vgl. auch Jahreaber. Deutsch. Math.-Verein. **22** (1913), S. 316–319

[3] *Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen*, Math. Annalen **77** (1915), S. 89–92

[4] *Über ganzrationale Darstellung der Invarianten eines Systems von beliebig vielen Grundformen*, Math. Annalen **77** (1915), S. 93–102

[5] *Die allgemeinsten Bereiche aus ganzen transzendenten Zahlen*, Math. Annalen **77** (1915), S. 103–128. Berichtigung dazu: Math. Annalen **81**, S. 30

[6] *Die Funktionalgleichungen der isomorphen Abbildung*, Math. Annalen **77** (1916), S. 536–545

[7] *Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe*, Math. Annalen **78** (1917), S.221–229. Berichtigung dazu: Math. Annalen **81**, S. 30.

[8] *Invarianten beliebiger Differentialausdrücke*, Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen (1918), S. 37–44

[9] *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen (1918), S. 235–257

[10] *Die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in ihrer Beziehung zu den übrigen Theorien und zu der Zahlkörpertheorie*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **28** (1919), S. 182-203

[11] *Die Endlichkeit des Systems der ganzzahligen Invarianten binärer Formen*, Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen (1819). S. 133–166

[12] *Zur Reihenentwicklung in der Formentheorie*, Math. Annalen **81** (1920), S. 26–30

[13] Gemeinsam mit W. Schmeidler: *Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken*, Math. Zeitschr. **8** (1920), S. 1–35

[14] *Über eine Arbeit des im Kriege gefallenen K. Hentzelt zur Eliminationstheorie*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **80** (1921), S. 101

[15] *Idealtheorie in Ringbereichen*, Math. Annalen **88** (1921), S. 21–66

[16] *Ein algebraisches Kriterium für absolute Irreduzibilität*, Math. Annalen **86** (1922), S. 26–33

[17] Bearbeitung von K. Hentzelt †: *Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten*, Math. Annalen **88** (1923), S. 53–79

[18] *Algebraische und Differentialinvarianten*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **38** (1923), S. 177–184

[19] *Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **88** (1924), S. 116–120

[20] *Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie*, Math. Annalen **90** (1923), S. 229–261

[21] *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie im algebraischen Zahlkörper*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **83** (1924), S. *102*

[22] *Hilbertsche Anzahlen in der Idealtheorie*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **34** (1925), S. *101*

[23] *Gruppencharaktere und Idealtheorie*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **84** (1925), S. *144*

[24] *Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik p*, Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen (1926), S. 28–35.

[25] *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern*, Math. Ann. **96** (1926), S. 26–61

[26] *Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers*, J. Reine Angew. Math. **167** (1927), S. 82–104

[27] Gemeinsam mit B. Brauer: *Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen*, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. (1927), S. 221–228

[28] *Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie in arithmetischer Auffassung*, Atti Congreaso Bologna **2** (1928), S. 71–73

[29] *Hyperkomplexe Größen und Daratellungstheorie*, Math. Zeitschr. **80** (1929), S. 641–692

[30] *Über Maximalbereiche von ganzzahligen Funktionen*, Rec. Soc. Math. Moscou **86** (1929), 8. 65-72

[31] *Idealdifferentiation und Differente*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **89** (1929), S. 17

[32] *Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung*, J. Reine Angew. Math. **167** (1932), S. 147–152

[33] Gemeinsam mit B. Brauer und H. Hasse: *Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren*, J. Reine Angew. Math. **167** (1932), S. 399–404.

[34] *Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und Zahlentheorie*, Verhandl. Internat. Math.-Kongreß Zürich **1** (1932), S. 189–194

[35] *Nichtkommutative Algebra*, Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 514–641

[36] *Der Hauptgeschlechtssatz für relativ-galoissche Zahlkörper*, Math. Annalen **108** (1933), S. 411–419

[37] *Zerfallende verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen*, Exposés mathématiques publiee a la mémoire de J. Herbrand IV (Actualités scient. et industr. 148) (1935).

(Eingegangen am 21. 6. 1935.)



Emmy Noether 1882 - 1935

Leopoldt über Helmut Hasse

Aus: *Crelles Journal Band 262/263 (1973)*

Zum wissenschaftlichen Werk von Helmut Hasse

Von Heinrich Wolfgang Leopoldt in Karlsruhe

Leicht überarbeitete Fassung eines Vortrags im Rahmen eines Festkolloquiums am 8. Dezember 1972 in Marburg, das zur Feier des Goldenen Doktorjubiläums von H. Hasse vom Mathematischen Institut der Philipps-Universität Marburg veranstaltet wurde. Insbesondere wurde der letzte Teil des Vortrags leicht ergänzt.

Sie, Herr Hasse, haben das Bild der Mathematik Ihrer Zeit ganz wesentlich mitgestaltet! Es war eine Zeit des Übergangs. Und damit meine ich vor allem die Ablösung der klassischen Algebra durch die abstrakte Algebra von heute. Sie haben sich sehr wesentlich für diese Entwicklung eingesetzt, in Vorträgen, in Lehrbüchern, und nicht zuletzt mit einer ansehnlichen Reihe außerordentlicher Erfolge dieser „algebraischen Methode" bei der Lösung konkreter zahlentheoretischer Probleme! Sie haben diese algebraische Methode und mit ihr die Zahlentheorie um einige, ganz spezifische Elemente bereichert, von denen noch die Rede sein wird. Ein am Umfang wie an Bedeutung so gewichtiges Werk wie das Ihre läßt sich in einem einzigen kurzen Vortrag nicht angemessen behandeln! Mir bleibt daher nichts anderes übrig, als diese Aufgabe neu zu definieren, und, da ich Ihnen, Herr Hasse, über Ihr Werk nichts erzählen kann, sehe ich meine Aufgabe nur darin, insbesondere den jüngeren Mathematikern dieses Werk ein wenig näher zu bringen. Lassen Sie mich also dem vorgegebenen Thema: „Das wissenschaftliche Werk von Helmut Hasse" einen Untertitel beigeben, der die Proportionen etwas zurechtrückt, etwa so: „Eine kleine Einführung für Fernerstehende". Genauer gesagt habe ich vor, anstatt von vielem wenig oder nichts zu sagen, von wenigem ein bißchen mehr zu sagen. Konkret: Von den vielen Dingen, die Hasse in weit über 200 Veröffentlichungen behandelt hat,

habe ich mir vier herausgesucht, die ich – eingebettet in ihren historischen Bezug – dem der Sache weniger Kundigen etwas deutlicher sichtbar machen möchte. Im einzelnen habe ich mir dafür ausgewählt:

(1) die **Entstehung des Lokal-Global-Prinzips** in den ersten Marburger Arbeiten (1921) und als den wohl schönsten Erfolg dieses Prinzips,

(2) die **Bestimmung der Brauergruppe** $\mathrm{Br}(K)$ eines Zahlkörpers K (1933).

Allein zwischen diesen ersten beiden Themenkreisen liegen in 10 bis 12 Jahren rund 50 bis 70 Arbeiten zur Theorie des Normenrestsymbols, zum allgemeinen Reziprozitätsgesetz, zur organischen Begründung der ersteren, wie über explizite Formeln für das letztere, zur Normenresttheorie und ihrem Zusammenhang mit der Führer- und Diskriminantentheorie, Arbeiten, auf die ich nicht einzeln eingehen werde, deren Vorhandensein hier aber doch wenigstens erwähnt werden soll. Zwischen diesen ersten beiden Themenkreisen liegen so gewichtige, eine ganze Entwicklung beeinflussende Veröffentlichungen wie die drei Teile des sogenannten Klassenkörperberichts. Zwischen diesen beiden Themenkreisen liegt beispielsweise aber auch eine Gruppe von Arbeiten, die hier fortzulassen mir besonders schmerzlich ist; ich meine die Arbeiten zur Neubegründung der klassischen Theorie der komplexen Multiplikation. Und zwischen diesen beiden Themenkreisen liegt noch mehr, was hier nur deshalb nicht genannt wird, weil es sich so schwer unter diese Sammelüberschriften einordnen läßt, was dem speziell Interessierten jedoch noch manche Überraschung bescheren dürfte.

Der zeitliche Abstand zum nächsten ausgesuchten Thema ist kurz; es handelt sich um etwa 3 Jahre und um nur etwas mehr als 20 Arbeiten. Dieses Thema ist

(3) der **Beweis des Analogons der Riemannschen Vermutung für elliptische Kongruenzfunktionenkörper** (1935/36). Es ist *ein* – vielleicht *das* – Musterbeispiel für die Kraft der algebraischen Methode und darf deshalb hier nicht fehlen!

Die Arbeiten der dann folgenden Jahre sind vor allem der Theorie der algebraischen Funktionenkörper und der Theorie der abelschen Funktionen gewidmet. Aber auch ganz andere Dinge finden sich hier, wie Arbeiten zur Struktur der bewerteten Körper oder wie der Vorläufer der späteren Bergströmschen Produktformel, um nur zwei von vielen Themen zu nennen. Etwa 6 Jahre und rund 20 Arbeiten später setzt der Krieg dieser ersten Schaffensperiode ein plötzliches Ende.

Die Wiederaufnahme der Arbeit nach dem Kriege beginnt mit Rückbesinnung auf die Wurzeln der algebraischen Zahlentheorie bei Kummer: Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Das ist sowohl der Titel der ersten, nach dem Ende des Krieges, veröffentlichten Arbeit von Hasse, als auch der einige Jahre später im Akademie-Verlag Berlin erscheinenden Monographie. Hinter diesem Titel steckt ein Programm, gerichtet auf

(4) *Abelsche Zahlkörper*. Hierüber und über das, was aus ihm geworden ist, zu berichten, habe ich mir als letzten Punkt ausgewählt.

Natürlich kommt damit wiederum nur ein Bruchteil der mathematischen Arbeit Hasses nach dem Kriege ins Blickfeld. Denn der Themenkatalog fächert sich nun

bald weiter als zuvor und die Zahl der Arbeiten aus dieser zweiten Schaffensperiode hat das erste Hundert inzwischen längst überschritten. Weniger spektakuläre, gleichwohl nicht minder bedeutsame Konstruktions- und Einbettungsprobleme stehen von nun an meist im Mittelpunkt, sei es, daß es sich um die Entwicklung des darstellungstheoretischen Apparates und seiner körpertheoretischen Realisierung handelt, oder etwa um Probleme der konstruktiven Beherrschung konkreter Körpertypen oder Zahlklassen, wie zum Beispiel die der Gaußschen Summen.

Doch ich habe versprochen, über die vier ausgewählten Punkte ein wenig mehr zu sagen, und muß mich deshalb für alles übrige auf diese sehr grobe Übersicht beschränken. Ein vorläufiges Verzeichnis der Veröffentlichungen von Herrn Hasse ist enthalten in J. C. Poggendorff, Biographisch-Literarisches Handwörterbuch VII a, 2 (Berlin 1958), 389–391, ferner in Author Index of Mathematical Reviews 1940–1959 (Providence 1961), 796–797, und ebendort 1960–1964 (Providence 1966), 486.

Beginnen wir also mit dem Anfang in Marburg, mit der

Entstehung des Lokal-Global-Prinzips

Versetzen wir uns einmal um gut 50 Jahre zurück! In das Frühjahr 1920! In Göttingen studiert ein vielversprechender junger Mann namens Helmut Hasse. Göttingen! Wirkungsstätte David Hilberts und damit in dieser Zeit unbestritten das Zentrum der Mathematik in Deutschland! Dennoch – ungeachtet der Möglichkeiten, die Göttingen damit bietet – Hasse entschließt sich, von Göttingen weg und hierher in das vergleichsweise weltabgeschiedene kleine Marburg zu ziehen. Warum?

Wie Hasse selbst einmal berichtet hat, war es ein Buch, das ihn zu diesem Schritt veranlaßte: die Henselsche Zahlentheorie, die ihm in einem Göttinger Antiquariat in die Hände fiel. Hier baut Hensel die Zahlentheorie auf mit Hilfe einer neuen und sehr merkwürdigen Konstruktion, den p-adischen Zahlen. Um mehr über diese schwer verständliche, aber doch irgendwie faszinierende Konstruktion zu erfahren, geht Hasse nach Marburg, denn dort lehrt Kurt Hensel, der sie erdachte.

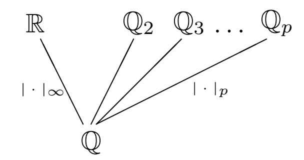
Was die Henselschen p-adischen Zahlen für die Zahlentheorie selbst bedeuten, davon wird heute noch mehrfach die Rede sein, denn dies ist mit dem Namen Helmut Hasse für immer untrennbar verbunden. Doch die historische Rolle dieser Henselschen Schöpfung reicht über die Zahlentheorie weit hinaus: Sie ist vielleicht nicht der einzige, aber doch sicher einer der entscheidenden Anstöße für jenen Prozeß, der die klassische Algebra ersetzt hat durch das, was programmatisch bis vor kurzem noch Moderne Algebra genannt wurde, uns heutigen aber längst die Algebra schlechthin geworden ist. Ein Prozeß, der 1910 mit der großen Arbeit von Steinitz über die „Algebraische Theorie der Körper" beginnt. Ich zitiere eine Fußnote zu ihrer Einleitung:

> Zu diesen allgemeinen Untersuchungen wurde ich besonders durch Hensels Theorie der algebraischen Zahlen (Leipzig, 1908) angeregt, in welcher der Körper der p-adischen Zahlen den Ausgangspunkt bildet, ein Körper, der weder den Funktionen- noch den Zahlkörpern im gewöhnlichen Sinn lies Wortes beizuzählen ist.

Ebenfalls im Bemühen, die p-adischen Zahlen besser zu verstehen, führt Kürschak 1912 den Begriff der Bewertung ein und das, was wir heute als die vollständige Hülle eines Körpers in bezug auf eine Bewertung verstehen. Die p-adischen Zahlen, welche bei Hensel noch als scheinbar divergente Reihen auftreten, lassen sich hiernach als die Elemente der vollständigen Hülle $\mathbb{Q}_p$ des rationalen Körpers $\mathbb{Q}$ in bezug auf den p-Betrag

$$|\cdot|_p = p^{-\operatorname{ord}_p(\cdot)}$$

verstehen und treten damit grundsätzlich den in gleicher Weise gebildeten reellen Zahlen ebenbürtig zur Seite:



Etwas später, 1918, weist Ostrowski nach, daß damit bereits alle Beträge von $\mathbb{Q}$ erschöpft sind.

Ebenbürtig, aber noch nicht gleichberechtigt! Das ist die Situation 1920. In Göttingen mag man vielleicht in der Existenz der p-adischen Zahlen eine spielerische Laune der Natur gesehen haben. Dem entsprechen jedenfalls die Kommentare, die Hasses Wechsel nach Marburg begleiten. Doch schon ein Jahr später, 1921, sieht das alles ganz anders aus: Bereits mit seiner ersten Arbeit, seiner Dissertation, erbringt Hasse in unübersehbarer Weise den Nachweis, daß diese p-adischen Zahlen den reellen Zahlen wenigstens im Bereich der Zahlentheorie an Bedeutung in nichts nachstehen: das Hassesche *Lokal-Global-Prinzip* wird geboren!

Es handelt sich zunächst um die Frage der Darstellbarkeit einer rationalen Zahl r durch eine gegebene quadratische Form $A(x) = \sum a_{ik}x_ix_k$ mit rationalen Koeffizienten a_{ik}. Die Antwort, genauer ihr erster Teil, lautet: *Es gibt genau dann eine rationale Lösung $x = (\ldots x_i \ldots)$ mit $x_i \in \mathbb{Q}$ der Gleichung $A(x) = r$, wenn es für jede Primstelle p von $\mathbb{Q}$ eine Lösung $x^{(p)} = (\ldots x_i^{(p)} \ldots)$ im zugehörigen lokalen Körper $\mathbb{Q}_p$ gibt*, wenn es also einerseits (für $p = \infty$) eine reelle Lösung $x^{(\infty)}$ von $A(x^{(\infty)}) = r$ und andererseits für jede Primzahl p eine p-adische Lösung $x^{(p)}$ von $A(x^{(p)}) = r$ gibt. Auf eine noch kürzere Formel gebracht besagt diese Aussage: Es gibt global eine Lösung genau dann, wenn überall lokal eine Lösung existiert. Dies ist das **Lokal-Global-Prinzip**! Scheinbar wird damit die Aufgabe erschwert; anstatt nach der Lösbarkeit in einem einzigen Körper – hier $\mathbb{Q}$ – zu fragen, wird die entsprechende Frage gleich für unendlich viele Körper, nämlich für alle den Primstellen p von $\mathbb{Q}$ zugeordneten lokalen Körper $\mathbb{Q}_p$ gestellt. In Wahrheit wird aber gerade dadurch die Frage entscheidend vereinfacht: während für den strukturreichen Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen eine Antwort direkt nur schwer zu erhalten wäre, ist dies für jeden der im Vergleich mit $\mathbb{Q}$ viel gröber strukturierten lokalen Körper $\mathbb{Q}_p$ ganz anders. Genau wie im Falle $p = \infty$ für $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ die Untergruppe der Quadrate den Index $(\mathbb{R} : \mathbb{R}^2) = 2$ hat und die Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit sich einfach aus dem Trägheitsindex der quadratischen Form ergibt, genau so ist auch für jede Primzahl p die Quadratklassengruppe $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p^2$ endlich

und läßt sich die Lösbarkeit in relativ einfacher Weise entscheiden; die notwendigen und hinreichenden Bedingungen – sie lassen sich mit Hilfe von Hilbertschen Normenrestsymbolen beschreiben – gibt Hasse im zweiten Teil der Antwort an. Wenn diese Bedingungen auch nicht so ganz vom Himmel fallen (ähnliche Bedingungen finden sich schon in den Minkowskischen Untersuchungen zu dieser Frage), so läßt sich doch sagen: das Problem wird erstmals abschließend behandelt, und es wird erstmals mit den dafür naturgemäßen, angemessenen Methoden behandelt; denn genau das leistet das Lokal-Global-Prinzip. Seither haben die p-adischen Zahlen das volle uneingeschränkte Bürgerrecht in der Zahlentheorie!

Die zweite Arbeit, zugleich die Habilitationsschrift, behandelt in derselben Weise, abschließend und naturgemäß mit Hilfe des Lokal-Global-Prinzips die Frage nach der rationalzahligen Äquivalenz rationaler quadratischer Formen. So angemessen ist diese neue Methode derartigen Fragen, daß sie sich ohne wesentliche Änderungen auf beliebige algebraische Zahlkörper k übertragen laßt. Die Situation ist hier im Grunde genau dieselbe wie für $\mathbb{Q}$, nur daß man hier im allgemeinen auch mehrere verschiedene unendliche Primstellen $\mathfrak{p}_\infty$ hat, die den Klassen äquivalenter Einbettungen von k in $\mathbb{C}$ entsprechen. Die dritte und vierte Arbeit behandeln so, abschließend und naturgemäß, das Darstellungs- und das Äquivalenzproblem über beliebigen Zahlkörpern, die fünfte Arbeit ebenso eine noch etwas allgemeinere Fragestellung.

Mit diesem – ich möchte sagen – Sturmlauf beginnt das wissenschaftliche Werk des Mannes, dem zu Ehren wir uns heute hier versammelt haben. Die Erfolge bleiben nicht aus: 1922, Dozent in Kiel, wo Steinitz lehrt; 1925, Ordinarius in Halle; 1930, Rückkehr nach Marburg als Nachfolger von Hensel. Doch ich greife vor!

Die kraftvolle, im Lokal-Global-Prinzip liegende Methode ist uns heutigen Mathematikern ebenso unentbehrlich wie selbstverständlich geworden. Hasse selbst hat in der Folgezeit noch manche Kostproben ihrer Wirksamkeit gegeben. Einigen der schönsten Beispiele werden wir später noch begegnen. Und selbst dort, wo dieses Prinzip zunächst unwirksam, weil als Aussage ungültig wird, bleibt es doch ein Wegweiser: wie man seit Kummer durch die Klassengruppe mißt, wie weit die Primzahlzerlegung von der Eindeutigkeit abweicht, ebenso beschreibt man heute die Abweichung vom Lokal-Global-Prinzip durch eine Gruppe, wie etwa in der Zahlentheorie der rationalen Punkte auf elliptischen Kurven.

In der folgenden Zeit macht Hasse das Hilbertsche Normenrestsymbol, mit dem er die Bedingungen für die Darstellbarkeit durch und die Äquivalenz von quadratischen Formen beschrieb, nun selbst zum Gegenstand der nächsten Arbeiten. In ihnen bemüht er sich, es durch lokale und globale Eigenschaften, durch p-Stetigkeit und Produktformel, zu charakterisieren, seine Theorie organisch zu begründen. Parallel damit gehen Untersuchungen über explizite Formeln zum Reziprozitätsgesetz und seinen Ergänzungssätzen. Bald weitet sich das Feld ...

Die Bemühungen um einen organischen Aufbau der Theorie des Normenrestsymbols und des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes finden ihren Höhepunkt und Abschluß aber erst, als es Hasse gelingt, ein ganz anderes, hiervon scheinbar weit entferntes Problem abschließend zu lösen, als es ihm nämlich gelingt, die

Struktur der Brauergruppe $\mathrm{Br}(k)$

eines Zahlkörpers k zu bestimmen. Da es sich hierbei um den meiner Ansicht nach wohl schönsten Erfolg der auf dem Lokal-Global-Prinzip beruhenden Methode handelt, möchte ich hierauf etwas näher eingehen.

Wir schreiben das Jahr 1927. In den Jahresberichten der DMV referiert Hasse über ein soeben übersetztes und von Speiser in Zürich mit einem Anhang versehenes Buch, das in Deutschland eine Lawine auszulösen scheint: es ist Dicksons Buch „Algebras and their Arithmetics“. Dasselbe Jahr bringt die Artinsche Arbeit „Zur Arithmetik der hyperkomplexen Systeme“, und in einem Zeitraum von nur wenigen Jahren erscheint nun eine Fülle schöner Arbeiten zur Theorie der Algebren. Der gegen Ende dieser stürmischen Entwicklung erscheinende Deuringsche Ergebnisbericht legt davon ein eindrucksvolles Zeugnis ab. Ich muß es mir versagen, dem im einzelnen nachzugehen, und möchte mich auf einen einzigen Aspekt beschränken, der Frage nach den zentralen Divisionsalgebren D/k von endlichem Rang $(D/k) = m^2$.

Für mehr als ein halbes Jahrhundert waren die Hamiltonschen Quaternionen H über $k = \mathbb{R}$ im wesentlichen das einzige Beispiel einer zentralen Divisionsalgebra endlichen Ranges gewesen, hatte Frobenius doch sogar zeigen können, daß über $k = \mathbb{R}$ außer H keine weiteren echten Divisionsalgebren dieser Art vorhanden sind. Das Dicksonsche Buch dürfte hier in zweifacher Hinsicht auslösend gewirkt haben: Einerseits scheint es das Vehikel gewesen zu sein, welches die Wedderburnschen Struktursätze in Deutschland weithin bekannt gemacht hat in einer Form, die hier wohl geradezu als Aufforderung verstanden werden mußte, diese schönen Resultate noch einmal gründlich zu durchleuchten. Andererseits und vor allem aber machte es die eben erwähnte Frage ganz einfach wieder interessant. Dadurch nämlich, daß Dickson hier zeigt, daß über jedem nicht allzu speziellen Grundkörper k zentrale Divisionsalgebren D beliebig großen Ranges $(D/k) = m^2$ wirklich existieren. Dickson zeigt genauer folgendes: Wenn k eine zyklische Erweiterung K/k vom Grade $(K/k) = m$ besitzt und es weiter in k ein Element $\alpha \neq 0$ gibt, welches in der Normenklassengruppe $k^\times/N_{K/k}K^\times$ die höchstmögliche Ordnung $m = (K/k)$ besitzt, so erhält man eine über k zentrale Divisionsalgebra D vom Rang $(D/k) = m^2$ in der Form

$$D = \sum_{\mu=0}^{m-1} u^\mu K \quad \text{mit} \quad u^m = \alpha \quad \text{und} \quad au = ua^S \quad \text{für } a \in K,$$

wo S einen festen erzeugenden Automorphismus von K/k bezeichnet. Für die so erklärte Divisionsalgebra schreiben wir kurz

$$D = (\alpha, K, S).$$

Läßt man die Voraussetzung über die Ordnung der Normenklasse von α fallen, so entsteht auf diese Weise doch wenigstens stets eine einfache zentrale Algebra über k; man nennt die so erhaltenen Algebren auch *zyklische Algebren* über k.

Wie gesagt, das Buch löst so etwas wie eine Lawine aus: zuerst sind es die Vertreter der abstrakten Algebra, allen voran Emmy Noether und Richard Brauer, welche die Wedderburnsche Strukturtheorie mit darstellungstheoretischen Methoden

neu durchleuchten. Dabei findet Brauer 1929, daß diese über k endlichen zentralen Schiefkörper D/k eine Gruppe bilden; eben die *Brauergruppe* $\mathrm{Br}(k)$ von k. Für ihre Definition ist es einfacher, gleich beliebige über k endliche und zentrale Algebren A zu betrachten. Jede solche Algebra ist nämlich volle Matrixalgebra über einem über k endlichen und zentralen Schiefkörper,

$$A = \mathcal{M}_r(D),$$

der durch A als Typ eindeutig bestimmt wird als der Automorphismen-Schiefkörper eines einfachen Linksideals. Nennen wir zwei solche Algebren *ähnlich*, $A' \sim A$, wenn sie in diesem Sinne zu demselben Schiefkörper gehören, so können und werden wir, anstatt von über k endlichen, zentralen Schiefkörpern zu reden, auch ebensogut von den Ähnlichkeitsklassen über k endlicher, zentraler einfacher Algebren, kurz: den *Algebrenklassen* über k, sprechen. Nun ist mit A und B auch das direkte Produkt $A \otimes B$ wiederum eine solche, über k endliche zentrale einfache Algebra und hängt die Klasse $(A \otimes B)$ des Produkts nur ab von den Klassen der Faktoren, so daß wir durch

$$\mathcal{C}(A) \cdot \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(A \otimes B)$$

eine offenbar assoziative und kommutative Multiplikation für die Menge $\mathrm{Br}(k)$ dieser Klassen erhalten. Die Klasse $\mathcal{E} = \mathcal{C}(k)$ von k selbst ist das Einselement und die Klasse der zu A jeweils invers-isomorphen Algebra A^* das zu $\mathcal{C}(A)$ inverse Element von $\mathrm{Br}(k)$,

$$\mathcal{C}(A^*) = (\mathcal{C}(A))^{-1}.$$

$\mathrm{Br}(k)$ wird damit zu einer abelschen Gruppe, genauer zu einer Torsionsgruppe; denn ist m der Index von A, also $m^2 = (D/k)$ der Rang des in A steckenden Schiefkörpers, so ist

$$\mathcal{C}(A)^m = \mathcal{E}.$$

Um diese Gruppe $\mathrm{Br}(k)$, seither die Brauergruppe genannt, geht es hier.

Benutzt man das Lokal-Global-Prinzip als systematischen Leitfaden, so hat man die Brauergruppe zunächst für einen lokalen Körper zu bestimmen. Für den archimedischen Fall, also für $k = \mathbb{R}$ bzw. $k = \mathbb{C}$, ist die Lösung dieser Aufgabe implizit enthalten in dem schon erwähnten Resultat von Frobenius. Für den viel interessanteren Fall eines p-adischen Grundkörpers löst Hasse diese Aufgabe in einer großen Arbeit „Uber $\wp$-adische Schiefkörper ...“. Hasse zeigt dort, daß die Arithmetik dieser $\wp$-adischen Schiefkörper in mancherlei Hinsicht bedeutend einfacher ist als im globalen Fall, ja, daß sogar auch gegenüber dem kommutativen Fall wichtige Vereinfachungen auftreten:

(1) $\wp$-adische Schiefkörper D haben nur eine einzige Maximalordnung; sie besteht aus allen ganzen Elementen von D. (2) Die Bewertung des Grundkörpers läßt sich eindeutig und gewissermaßen kommutativ auf D fortsetzen. (3) Restklassengrad und Verzweigungsordnung sind im zentralen Fall stets gleich, $e = f = m$ bei $(D/k) = m^2$. (4) Das Phänomen der irregulären Verzweigung tritt nicht auf; es gilt also hier stets die einfache Differentenformel

$$\mathfrak{D}(D/k) = \wp^{m-1}.$$

Darüberhinaus enthält D stets in der unverzweigten Erweiterung $k^{(m)}/k$ vom Grade m einen maximalen Teilkörper, welcher zyklisch ist und in dem Frobeniusautomorphismus F_m eine ausgezeichnete Erzeugende seiner Galoisgruppe $\mathfrak{G} = \mathrm{Gal}(k^{(m)}/k) = \langle F_m \rangle$ besitzt. Hieraus ergibt sich dann leicht, daß D – und damit allgemeiner jede über k endliche zentrale einfache Algebra A vom Rang $(A/k) = n^2$ – zyklisch darstellbar ist in der Form $A = (\alpha, k^{(n)}, F_n)$ mit passendem $\alpha \in k^\times$. Nach den allgemeinen Regeln

$$(\alpha, K, S) \otimes (\beta, K, S) \sim (\alpha\beta, K, S)$$

und

$$(\alpha, K, S) \sim (\beta, K, S) \iff \beta\alpha^{-1} \in N_{K/k}(K^\times)$$

für zyklische Algebren folgt nun sofort, daß es in jener Darstellung $A = (\alpha, k^{(n)}, F_n)$ nur auf $\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\alpha) \bmod n$ ankommt. Aus diesen und weiteren einfachen Eigenschaften zyklischer Algebren ergibt sich dann als Hauptresultat: *Die Restklasse*

$$\mathrm{inv}\,\mathcal{A} \equiv \frac{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\alpha)}{n} \mod^+ 1$$

hängt nur von der Klasse $\mathcal{A} = \mathcal{C}(A)$ *ab, und die Zuordnung*

$$\mathrm{Br}(k) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \mathcal{A} \longmapsto \mathrm{inv}\,\mathcal{A} \mod^+ 1$$

liefert einen Isomorphismus der Brauergruppe von k mit der additiven Gruppe der rationalen Zahlen modulo Eins.

Damit ist der lokale Fall erledigt. Als Frucht ergibt sich u. a. eine völlig organische Theorie des Normsymbols im lokalen Fall:

Ist K/k eine zyklische Erweiterung vom Grade n und ist S eine Erzeugende ihrer Galoisgruppe $\mathfrak{G}$, so bilde man die *Invariante*

$$\mathrm{inv}\,\mathcal{A} \equiv \frac{\nu}{n} \mod^+ 1$$

der Klasse $\mathcal{A} = \mathcal{C}(A)$ der zyklischen Algebra $A = (\alpha, K, S)$ und erkläre das *Normsymbol* durch

$$(\alpha, K/k) = S^{-\nu}.$$

Dieselben einfachen Regeln über zyklische Algebren zeigen dann, daß die Zuordnung

$$k^\times \longrightarrow \mathfrak{G}, \quad \alpha \longmapsto (\alpha, K/k)$$

ein kanonischer, d.h. von der Wahl von S ganz unabhängiger Homomorphismus von $k^\times$ auf die volle Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von K/k mit der Normengruppe $N_{K/k}(K^\times)$ als Kern ist, der sich speziell im unverzweigten Fall durch die einfache Formel

$$(\alpha, k^{(n)}/k) = F_n^{-\,\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\alpha)}$$

berechnet.

Nun sei k ein Zahlkörper und bezeichne für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ von k jeweils $k_\mathfrak{p}$ den zugehörigen lokalen Körper. Aus jeder Algebra A/k entsteht dann durch Grundkörpererweiterung jeweils auf $k_\mathfrak{p}$ das System der zugehörigen lokalen Algebren $A_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}$. Die Klasse $\mathcal{A}_\mathfrak{p} = \mathcal{C}(A_\mathfrak{p})$ hängt dabei nur von der Klasse $\mathcal{A} = \mathcal{C}(A)$ ab, und wir erhalten so einen Homomorphismus

$$(1) \qquad \mathrm{Br}(k) \longrightarrow \prod_\mathfrak{p} \mathrm{Br}(k_\mathfrak{p}), \quad \mathcal{A} \longmapsto (\ldots, \mathcal{A}_\mathfrak{p}, \ldots)$$

der Brauergruppe des globalen Körpers k in das Produkt der Brauergruppen der lokalen Körper $k_\mathfrak{p}$ zu k. Die für die Bestimmung der Brauergruppe entscheidende Tatsache entspricht nun vollständig derjenigen Form des Lokal-Global-Prinzips, welche uns schon in der Theorie der quadratischen Formen entgegengetreten ist; es handelt sich um den

Hauptsatz von Brauer-Hasse-Noether. *Eine Algebrenklasse $\mathcal{A}$ über k zerfällt global, d. h. es gilt $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ in* Br(k), *genau dann, wenn sie überall lokal zerfällt, wenn also für alle Primstellen $\mathfrak{p}$ von k jeweils $\mathcal{A}_\mathfrak{p} = \mathcal{E}_\mathfrak{p}$ in* Br($k_\mathfrak{p}$) *gilt.*

Anders ausgedrückt: der Homomorphismus (1) ist injektiv!

Der wichtigste Beweisschritt betrifft den Spezialfall einer zyklisch darstellbaren Algebrenklasse $\mathcal{A} = \mathcal{C}(A)$, mit $A = (\alpha, K, S)$, und die entsprechende Teilaussage ist äquivalent mit dem

Hasseschen Normensatz. *Ist K/k zyklisch, so ist ein $\alpha \neq 0$ aus k genau dann Norm eines Elements $A \neq 0$ aus K, wenn α überall lokal eine Norm ist.*

In diesem Zusammenhang ist die Bemerkung interessant, daß man – nach Zorn – den Hauptsatz auch ablesen kann aus dem Polverhalten der einer einfachen Algebra über k zugeordneten Zetafunktion. Auf diese Weise ergibt sich also zugleich ein Beweis des Normensatzes!

Für die vollständige Bestimmung von Br(k) brauchen wir noch die Angabe des Bildes des Homomorphismus (1)! Unmittelbar aus dem Hauptsatz ergibt sich nun zunächst die Möglichkeit, die sogenannten Zerfällungskörper einer Klasse allein durch eine Bedingung für die lokalen Grade zu charakterisieren: *eine normale Erweiterung K/k ist Zerfällungskörper von $\mathcal{A}$ genau dann, wenn für alle Primstellen $\mathfrak{p}$ von k der lokale Grad $n_\mathfrak{p} = (K_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p})$ durch den Index $m_\mathfrak{p}$ von $\mathcal{A}_\mathfrak{p}$ teilbar ist.*

Es ist nun nicht schwer einzusehen, daß sich diese Bedingungen durch relative Kreiskörper über k realisieren lassen! Damit ergibt sich auch im globalen Fall: *Jede über k endliche zentrale einfache Algebra A ist zyklisch darstellbar: $A = (\alpha, K, S)$. Für K/k kann man dabei eine Kreiskörpererweiterung nehmen.*

Damit ist es nun möglich, das Bild von (1) zu bestimmen! Wir beschreiben es mit Hilfe der Invarianten, also der Restklassen

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \operatorname{inv} \mathcal{A}_\mathfrak{p} \mod^+ 1.$$

Für sie gilt notwendig jedenfalls die Endlichkeitsbedingung

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \mod^+ 1 \quad \text{für fast alle } \mathfrak{p},$$

denn die übrigen Primstellen sind als die Verzweigungsstellen der zu $\mathcal{A}$ gehörenden Divisionsalgebra nur in endlicher Zahl vorhanden. Weiter gilt ersichtlich die folgende Zusatzbedingung für die unendlichen Primstellen

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \begin{cases} \mod^+ \frac{1}{2} & \text{für } \mathfrak{p} \text{ reell,} \\ \mod^+ 1 & \text{für } \mathfrak{p} \text{ komplex,} \end{cases}$$

da im ersten Fall nach Frobenius nur die Klasse der Quaternionenalgebra, im übrigen aber überhaupt keine von $\mathcal{E}_\mathfrak{p}$ verschiedene Algebrenklasse über k vorhanden ist. Benutzt man nun einen geeigneten relativen Kreiskörper K/k für die zyklische Darstellung $A = (\alpha, K, S)$ und beachtet man das für diesen Spezialfall sehr einfach zu beweisende Reziprozitätsgesetz, so erhält man als weitere entscheidende Einschränkung den

Summensatz *für die Invarianten*

$$\sum_\mathfrak{p} \left(\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \mod^+ 1.$$

Es zeigt sich nun, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind: zu jedem System von Restklassen $\rho_\mathfrak{p} \mod^+ 1$, das ihnen genügt, gibt es eine Klasse

$$\mathcal{A} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \rho_\mathfrak{p} \mod^+ 1 \quad \text{für alle } \mathfrak{p}.$$

Dazu zeigt man, daß $\mathcal{A} = \mathcal{C}(A)$ mit $A = (\alpha, K, S)$ für einen geeigneten relativen Kreiskörper K/k bei passender Wahl von $\alpha \in k^\times$ diese vorgegebenen Invarianten hat. Damit ist dann $\mathrm{Br}(k)$ auch im globalen Fall vollständig bestimmt.

Genau wie im lokalen Fall läßt sich die Strukturtheorie der Brauergruppe für eine organische Begründung der **Theorie des Normenrestsymbols** heranziehen: Sei dazu wieder K/k eine zyklische Erweiterung vom Grad n mit S als erzeugendem Automorphismus. Man bilde $\mathcal{A} = \mathcal{C}(A)$ für $A = (\alpha, K, S)$, definiere $\nu_\mathfrak{p} \mod n$ durch

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \frac{\nu_\mathfrak{p}}{n} \mod^+ 1$$

und setze

$$\left(\frac{\alpha, K/k}{\mathfrak{p}}\right) = S^{-\nu_\mathfrak{p}}.$$

Aus den Eigenschaften und Rechenregeln für zyklische Algebren ergibt sich dann genau wie im lokalen Fall, daß die Abbildung

$$k^\times \longrightarrow \mathfrak{G}, \quad \alpha \longmapsto \left(\frac{\alpha, K/k}{\mathfrak{p}}\right)$$

von k in die Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von K/k ein von der Wahl von S unabhängiger, also kanonischer Homomorphismus auf die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{G}_{\mathfrak{p}}$ mit der Gruppe der Normenreste mod $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$ (also der Gruppe der lokalen Normen) als Kern ist, der sich für in K/k unverzweigte Primstellen aus der Formel

$$\left(\frac{\alpha, K/k}{\mathfrak{p}}\right) = F_{\mathfrak{p}}^{-\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha)}$$

in einfacher Weise durch den zugehörigen Frobeniusautomorphismus berechnen läßt und damit insbesondere der Endlichkeitsbedingung

$$\left(\frac{\alpha, K/k}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \text{ für fast alle } \mathfrak{p}$$

genügt. Fügt man noch den Normensatz und die sich aus dem Summensatz für die Invariante ergebende **Produktformel für das Normenrestsymbol**

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, K/k}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

hinzu, so ist die Theorie des Normenrestsymbols in allen wesentlichen Punkten vollständig. In dieser Weise wird die Bestimmung der Struktur der Brauergruppe Br(k) von k zum Instrument, um aus dem elementar zugänglichen Reziprozitätsgesetz für relative Kreiskörper über k den wesentlichen Teil des allgemeinen Artinschen Reziprozitätsgesetzes herzuleiten, denn darum handelt es sich ja bei der Produktformel für das Normenrestsymbol!

Die so diffizile Frage nach organischer Begründung des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes in k verschmilzt mit der ganz konkreten Frage nach den endlichen zentralen Divisionsalgebren über k. Nicht ohne Wehmut werden wir Jüngeren daran denken, was daraus geworden ist, wie die Brauergruppe als zweite Kohomologiegruppe sich zwar einfügt in einen ebenso effektiven wie umfassenden Kalkül, dem man die Antwort auf die erste Frage heute zu entnehmen pflegt, wie sie dabei aber auch um so blasser wird, je mehr sich ihr in der zweiten Frage angesprochener konkreter Inhalt dabei als entbehrliche Zugabe verflüchtigt.

Gehen wir über zum nächsten Punkt, den ich hier herausgreifen möchte, zum

Beweis des Analogons der Riemannschen Vermutung für elliptische Kongruenzfunktionenkörper

Noch im selben Jahr 1932, das mit der großen Arbeit über die „Struktur der Richard Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper“ den Höhepunkt und damit im wesentlichen auch den Abschluß der Arbeiten zur Arithmetik der Algebren einerseits, zur Begründung der Theorie des Normenrestsymbols und des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes andererseits bringt, erscheint auch schon die Vorankündigung kommender Ereignisse in einer vorläufigen Mitteilung in den Nachrichten der Akademie in Göttingen mit dem Titel: „Beweis des

Analogons der Riemannschen Vermutung für die Artinsche und F. K. Schmidtsche Kongruenz-Zetafunktion in gewissen elliptischen Fällen". Es handelt sich dabei um das folgende allgemeine Problem: Gegeben sei ein absolut irreduzibles Polynom $f(x, y)$ mit Koeffizienten aus dem endlichen Körper $k = \mathbb{F}_q$ von q Elementen. Gesucht ist die Anzahl N der Lösungen (ξ, η) in $\mathbb{F}_q$ der Gleichung

$$f(\xi, \eta) = 0.$$

Der „elliptische Fall" ist hier im wesentlichen der Spezialfall

$$f(x, y) = y^2 - f_3(x)$$

mit einem kubischen Polynom $f_3(x)$ ohne mehrfache Faktoren. Zur Vorgeschichte möchte ich zunächst Hasse selbst zitieren. Er sagt an anderer Stelle, nachdem er von den für diesen Spezialfall kurz vorher von Davenport bzw. Mordell erzielten Abschätzungen

$$|N - p| \leq \text{const.}\, p^{\theta} \quad \text{mit} \quad \theta = \frac{3}{4} \text{ bzw. } = \frac{2}{3}$$

im Fall $q = p$ Primzahl berichtet:

> Beide Forscher vermuteten, daß der Exponent zu $\frac{1}{2}$ verbessert werden könnte, was – wie man leicht sieht – der bestmögliche Wert ist. Sie konnten dies aber mit ihren, der elementaren Zahlentheorie entnommenen Hilfsmitteln nicht beweisen. Etwas ungläubig an der Kraft der modernen zahlentheoretischen Methoden mit ihrer starken begrifflichen Durchsetzung für elementarzahlentheoretische Fragestellungen, forderte Davenport mich heraus, damit doch wenigstens ein greifbares zahlentheoretisches Resultat zu beweisen, etwa die eben genannte Vermutung. Das ist mir dann auch gelungen, zu meiner eigenen Freude und Genugtuung, und zur vollen Zufriedenheit meines Freundes Davenport.

Wenn ein Mathematiker etwas von einem Analogon zur Riemannschen Vermutung hört, so denkt er an eine Aussage über die Lage von Nullstellen einer Zetafunktion. Davon ist hier zunächst nicht die Rede. Verfolgen wir also die Vorgeschichte ein Stückchen weiter zurück, um den Zusammenhang deutlich zu machen!

Es handelt sich hier um quadratische Erweiterungen K/P des rationalen Funktionenkörpers $P = \mathbb{F}_p(t)$. Solche Körper wurden in einer anderen gewichtigen Dissertation des Jahres 1921 erstmalig untersucht, in der Artinschen Arbeit „Uber quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen". Artin nimmt einen nicht-invarianten Standpunkt ein, indem er die Variable t oder also den Ring $\Gamma = \mathbb{F}_p[t]$ auszeichnet. Davon abgesehen entwickelt er die Theorie in weitestgehender Analogie zur Theorie der quadratischen Zahlkörper, wobei er sich meist idealtheoretischer Methoden bedient. Im analytischen Teil führt er die zugehörige Kongruenz-Zetafunktion ein und wirft die Frage auf, ob das Analogon der Riemannschen Vermutung für diese Kongruenz-Zetafunktionen richtig ist. In allen von ihm explizit behandelten Spezialfällen, etwa 40 an der Zahl, kann er das

bestätigen. 8 Jahre später, 1929, entwickelt F. K. Schmidt in seiner grundlegenden Arbeit „Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p“ die Theorie der Kongruenzfunktionenkörper, d. h. der endlich erzeugbaren Erweiterungen K/k vom Transzendenzgrad 1 eines endlichen Körpers $k = \mathbb{F}_q$, von dem wir ohne Einschränkung annehmen können, daß er in K algebraisch abgeschlossen ist, und der ihnen zugeordneten Kongruenz-Zetafunktion

$$\zeta_{K/k}(s) = \sum_{\mathfrak{g}} N(\mathfrak{g})^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

allgemein und körperinvariant in der hierfür besser geeigneten Sprechweise der Divisorentheorie. In ihr entsprechen die Primdivisoren $\mathfrak{p}$ umkehrbar eindeutig den diskreten normierten Exponentenbewertungen $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\cdot)$ von K/k, sind die ganzen Divisoren $\mathfrak{g}$ deren Potenzprodukte und ist die Norm $N(\mathfrak{g})$ multiplikativ derart erklärt, daß jeweils $N(\mathfrak{p}) = |K\mathfrak{p}| = q^{d(\mathfrak{p})}$ die Elementanzahl des Restklassenkörpers $K\mathfrak{p}$ von K mod $\mathfrak{p}$ ist. Schreiben wir beliebige Divisoren $\mathfrak{a}$ von K/k in der Form

$$\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{a_{\mathfrak{p}}} \text{ mit } a_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z} \text{ und } a_{\mathfrak{p}} = 0 \text{ für fast alle } \mathfrak{p},$$

so erweist sich der homomorph erweiterte Divisorgrad

$$d(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{p}} d(\mathfrak{p}) a_{\mathfrak{p}}$$

als Klassenfunktion, d. h. es gilt

$$d(\mathfrak{a}) = d(C) \text{ für } C = \mathfrak{a}H,$$

wo H die Gruppe der den Elementen $x \in K^{\times}$ zugeordneten Hauptdivisoren

$$\mathfrak{h}_x = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x)}$$

bezeichnet. Dieselbe Eigenschaft, Klassenfunktion zu sein, also

$$\dim \mathfrak{a} = \dim C \quad \text{für} \quad C = \mathfrak{a}H,$$

hat die Dimension $\dim \mathfrak{a}$ des k-Vektorraums

$$L(\mathfrak{a}) = \{x \in K^{\times} \,|\, \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x) \geq -a_{\mathfrak{p}} \text{ für alle } \mathfrak{p}\}$$

der Vielfachen von $\mathfrak{a}^{-1}$. Der Riemann-Rochsche Satz

$$\dim C = d(C) - (g-1) + \dim \frac{W}{C}$$

gewinnt die ihm zukommende zentrale Rolle. Dabei bezeichnet W die sogenannte *Differentialklasse* und $g = \dim W$ das Geschlecht von K/k. Als einfache Folge ergibt sich die *Funktionalgleichung*

$$q^{(g-1)s} \zeta_{K/k}(s) \text{ ist invariant bei } s \longmapsto 1 - s.$$

Das Analogon der Riemannschen Vermutung, also die Frage, ob alle Nullstellen von $\zeta_{K/k}(s)$ den Realteil $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ besitzen, wird erstmalig allgemein aufgeworfen. Der Beweis der Funktionalgleichung setzt dabei die Tatsache in Evidenz, daß die Kongruenz-Zetafunktion eine rationale Funktion von $U = q^{-s}$ ist. Genauer gilt, was allerdings erst ein wenig später deutlich wird,

$$\zeta_{K/k}(s) = \zeta_{K_0/k}(s) L_{K/k}(s),$$

wobei die Kongruenzzetafunktion des rationalen Körpers $K_0 = k(t)$ durch

$$\zeta_{K_0/k}(s) = \frac{1}{(1-q^{-s})(1-q^{1-s})}$$

gegeben ist und $L_{K/k}(s)$ ein Polynom in $U = q^{-s}$ vom Grade $2g$ mit ganzen rationalen Koeffizienten von der Gestalt

$$L_{K/k}(s) = 1 + \{N_1 - (q+1)\}q^{-s} + \ldots + q^g \cdot q^{-2gs}$$

bezeichnet, das demnach etwa über dem komplexen Zahlkörper in der Form

$$L_{K/k}(s) = \prod_{\nu=1}^{2g} \left(1 - \frac{\omega_\nu}{q^s}\right)$$

zerfällt. Als Analogon der Riemannschen Vermutung kann man somit die Aussage ansehen, daß die in q^s gemessenen Nullstellen $\omega_1, \ldots, \omega_{2g}$ dieses Polynoms sämtlich den Betrag

$$|\omega_\nu| = \sqrt{q} \quad (\nu = 1, \ldots, 2g)$$

haben. Für die Anzahl N_1 der Primdivisoren ersten Grades ergibt sich unter Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung nun sofort die Abschätzung

$$|N_1 - (q+1)| \leq 2g \cdot \sqrt{q}.$$

Tatsächlich ist nun diese letzte Ungleichung mit dem Analogon der Riemannschen Vermutung sogar äquivalent, was man unschwer erkennt, wenn man K/k zusammen mit allen endlichen Konstantenerweiterungen $Kk^{(d)}/k^{(d)}$ betrachtet. Soweit ich sehen kann, wird dieser Zusammenhang erstmals in einer (unter Benutzung von Mitteilungen von F. K. Schmidt und E. Artin verfaßten) Note von Hasse „Uber Kongruenz-Zetafunktionen“ in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie aus dem Jahre 1934 entwickelt. Sie enthält auch die „gewöhnliche Deutung“ dieser Ungleichung: Ist etwa

$$K = k(x, y) \quad \text{mit} \quad f(x, y) = 0$$

eine geeignete Erzeugung von K/k, so entsprechen die Primdivisoren $\mathfrak{p}$ vom ersten Grade vermöge

$$\mathfrak{p} \leftrightarrow (\xi, \eta) : x \equiv \xi, y \equiv \eta \pmod{\mathfrak{p}}$$

im wesentlichen umkehrbar eindeutig den Punkten (ξ, η) aus k auf der Kurve

$$f(\xi, \eta) = 0.$$

Dies gilt sogar exakt, wenn keine „singulären Punkte“ vorhanden sind und auch die „Punkte im Unendlichen“ mit einbezogen werden, indem man also die Kurve projektiv (und nicht affin) betrachtet. Damit ist der Zusammenhang mit dem eingangs formulierten Problem hergestellt und zugleich eine birational invariante Formulierung gefunden.

Im elliptischen Fall nun ist $g = 1$, ist also $L_{K/k}(s) = \mathcal{L}(q^{-s})$ ein quadratisches Polynom in $U = q^{-s}$; das Analogon der Riemannschen Vermutung lautet hier also einfach: Die beiden Nullstellen ω_1, ω_2 sind entweder konjugiert komplex oder reell mit gleichem Betrag.

Hasse beweist diese Aussage, indem er gewissermaßen die begriffliche Bedeutung dieser Nullstellen freilegt. Es ist ein beredtes Zeugnis für die Kraft der algebraischen Methode, daß man sagen kann: Dies geht völlig naturgemäß und fast zwangsläufig vor sich. Zunächst verschafft Hasse sich dazu das Analogon der Torusgruppe der klassischen Theorie der elliptischen Funktionenkörper in der additiven Gruppe $\mathcal{A}$ der algebraischen Punkte. Körpertheoretisch betrachtet (und damit die Sonderstellung von singulären oder unendlich fernen Punkten vermeidend) sind dies die Primdivisoren $\overline{\mathfrak{p}}$ der algebraisch abgeschlossenen Konstantenerweiterung $\mathcal{K} = K\overline{k}$. Nach Wahl eines Bezugsprimdivisors $\mathfrak{o}$ vom Grad eins von K/k – der dann zum Nullpunkt von $\mathcal{A}$ wird – entsprechen die $\overline{\mathfrak{p}}$ umkehrbar eindeutig den Nullklassen C_0 von $\mathcal{K}/k$ vermöge

$$\overline{\mathfrak{p}} \leftrightarrow C_0 = \frac{\overline{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{o}} H,$$

die Addition in $\mathcal{A}$ kann nun eindeutig aus der Nullklassengruppe von $\mathcal{K}/k$ bezogen werden,

$$\overline{\mathfrak{p}} = \overline{\mathfrak{p}}' + \overline{\mathfrak{p}}'' \leftrightarrow \frac{\overline{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{o}} \sim \frac{\overline{\mathfrak{p}}'}{\mathfrak{o}} \cdot \frac{\overline{\mathfrak{p}}''}{\mathfrak{o}},$$

und die Primdivisoron ersten Grades von K/k bilden die Untergruppe $\mathcal{G}$ der rationalen Punkte, deren Ordnung $|\mathcal{G}| = N_1$ gesucht wird. Wie läßt sich $\mathcal{G}$ innerhalb $\mathcal{A}$ charakterisieren? Geht man über zu den Koordinaten der Punkte auf der Kurve, so ist klar, daß diese genau dann zum Grundkörper $k = \mathbb{F}_q$ gehören, wenn sie bei der Potenzierung mit q invariant sind. Der von der Potenzierung mit q bewirkte *Frobeniusendomorphismus* π von $\mathcal{A}$ gestattet nun in der Tat, die Gruppe $\mathcal{G}$ der rationalen Punkte innerhalb $\mathcal{A}$ zu charakterisieren: erwartungsgemäß ist $\mathfrak{p} \in \mathcal{G}$ genau dann, wenn $\pi\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ ist. Die begriffliche Deutung der Nullstellen ω_1, ω_2 liegt nun darin, daß sich $\mathcal{L}(U)$, d.h. genauer das dazu reziproke Polynom

$$\mathcal{F}_\pi(U) = U^2 \mathcal{L}(U^{-1}),$$

als – wie wir heute sagen würden – das charakteristische Polynom eben dieses Frobeniusendomorphismus π erweist.

Um dieses charakteristische Polynom berechnen und so seine Identität mit dem zu $\mathcal{L}(U)$ reziproken Polynom erkennen zu können, muß man die grundlegenden

Tatsachen über die Struktur des Endomorphismenrings von $\mathcal{A}$ herleiten. All dies wird von Hasse mit rein algebraischen Mitteln geleistet. Dabei stellt sich heraus, daß – genau wie im klassischen Fall – neben den ganzrationalen Zahlen als trivialen „Multiplikatoren" von $\mathcal{A}$ höchstens noch solche „komplexen Multiplikatoren" in Betracht kommen, welche ganz imaginär-quadratisch über $\mathbb{Z}$ sind. Der „Multiplikatorenring" ist dann eine Ordnung eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers oder einer definiten Quaternionenalgebra. Insbesondere haben die beiden Nullstellen des Hauptpolynoms $\mathcal{F}_\mu(U)$ eines solchen Multiplikators μ stets denselben Betrag, was für $\mu = \pi$ gerade die als Analogon der Riemannschen Vermutung bezeichnete Aussage ist.

Ganz kurz nur einige Bemerkungen darüber, wie sich die dieses schöne Ergebnis begründende Untersuchung des Endomorphismenrings – in klassischem Sinne also der „Multiplikatoren" – von $\mathcal{A}$ entwickelt: Betrachtet man den klassischen Fall mit den Augen eines Algebraikers, so sieht man, diesen Multiplikatoren entsprechen Isomorphismen des zugehörigen Funktionenkörpers in sich (Meromorphismen) und umgekehrt, jeder solche Isomorphismus – läßt er nur den Bezugspunkt $\mathfrak{o}$ fest – liefert einen solchen Multiplikator. Diese Isomorphismen μ aber entsprechen offensichtlich den Lösungen $(x\mu, y\mu)$ in $\mathcal{K}$ einer K/k und damit $\mathcal{K}/\overline{k}$ definierenden Gleichung $f(x, y) = 0$, die sich ihrerseits wie oben durch die Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{P}$ eines durch dieselbe Grundgleichung über $\mathcal{K}$ als Konstantenkörper definierten elliptischen Funktionenkörper $\mathfrak{K}/\mathcal{K}$ beschreiben lassen. Damit hat man das algebraische Hilfsmittel gewonnen, um die gestellte Aufgabe zu lösen, und – in der gröberen Nullklassengruppe von $\mathfrak{K}/\mathcal{K}$ – zugleich die additive Struktur des zu untersuchenden Multiplikatorenbereichs. Die Multiplikation ergibt sich – wie immer bei Endomorphismen – durch Schachtelung. Die als Grad über dem Bildkörper erklärte Norm

$$n(\mu) = (\mathcal{K}/\mathcal{K}\mu)$$

eines Multiplikators μ ist also ersichtlich multiplikativ und für $\mu \neq 0$ nur positiver Werte fähig. Das Herzstück der Theorie liegt nun im Verhalten dieser Norm gegenüber der Addition, liegt in der Normenadditionsformel

$$n(\mu + \nu) + n(\mu - \nu) = 2n(\mu) + 2n(\nu).$$

Aus ihr ergibt sich dann leicht, daß

$$Q_{\mu,\nu}(a, b) = n(a\mu + b\nu)$$

eine positiv semidefinite quadratische Form von $a, b \in \mathbb{Z}$ ist, daß insbesondere

$$\mathcal{F}_\mu(U) = n(U1 - \mu)$$

mit dem identischen Multiplikator 1 von $\mathcal{A}$ das gesuchte Hauptpolynom von μ über $\mathbb{Z}$ ist. Die Normadditionsformel fließt aus dem Additionstheorem für die „große" Konstantenerweiterung $\mathfrak{K}/\mathcal{K}$ und entspricht der 2-Dimensionalität von $\mathcal{A}$ im klassischen Fall, welche Hasse der ganzen Untersuchung in der folgenden rein

algebraischen Form voranstellt: Ist die Charakteristik p von k kein Teiler von n, so hat die Untergruppe $\mathcal{A}_n$ der n-Teilungspunkte von $\mathcal{A}$ die Ordnung

$$|\mathcal{A}_n| = n^2.$$

Daß sich die Grundtatsachen der klassischen Theorie der elliptischen Funktionen in so organischer Weise rein algebraisch fassen lassen und in ihrer systematischen Anwendung auf endliche Körper so zu weitreichenden und neuartigen Ergebnissen führen, die sich von der klassischen Theorie her gesehen nicht einmal erahnen lassen, ist sicher ein ganz außerordentlicher Erfolg der „algebraischen Methode“ gewesen.

In der Folgezeit wird dieses machtvolle Hilfsmittel, die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen im Verein mit anderen systematisch ausgebaut, wird begonnen, das für $g = 1$ Erreichte auch für den Fall eines Geschlechts $g > 1$ vorzubereiten: eine arithmetische Theorie der abelschen Funktionenkörper beginnt zu entstehen. Doch dieser vielleicht fruchtbarsten Zeit setzt der Krieg ein jähes Ende.

1945!

Im August dieses Jahres schließt Hasse die Arbeit an der ersten Veröffentlichung ab, die der Nachkriegszeit angehört, schreibt er das Vorwort nieder zur Monographie „Uber die Klassenzahl der abelschen Zahlkörper“. Dieser zweiten Schaffensperiode allein, die damit anhebt, gehören heute schon mehr als 100 Publikationen an, wobei sich der Themenkreis fast noch weiter fächert als zuvor. Doch ich möchte meinen Überblick ausklingen lassen mit diesem Buch, genauer mit seinem auf

Abelsche Zahlkörper

gerichteten Programm und dem, was daraus geworden ist.

Der Titel schon signalisiert, um was es sich handelt: die Wiederaufnahme der Arbeit nach dem Kriege beginnt mit einer Rückbesinnung auf den Ursprung der algebraischen Zahlentheorie bei Kummer. Das Vorwort ist ein Bekenntnis zu den Quellen zahlentheoretischen Tuns. Gerade als solches ist es auch heute noch ein Dokument, das zu lesen sich lohnt und jedem ernsthaft Interessierten sehr empfohlen werden kann! Ich möchte mir erlauben einige Sätze dieses Vorworts zu zitieren!

Nachdem er zunächst geschildert hat, wie sich die algebraische Zahlentheorie unter dem Einfluß Hilberts vom Zahlbericht hin zur Klassenkörpertheorie entfaltet, sagt Hasse:

> Bei dieser ganzen Entwicklung ... ist nun aber das jedem echten Zahlentheoretiker eigene Bedürfnis nach expliziter Beherrschung des behandelten Gegenstandes bis zur Durchführung numerischer Beispiele stark in den Hintergrund getreten. Fragt man heute einen Zahlentheoretiker, für welche Typen algebraischer Zahlkörper er in der Lage ist, die Gesetzlichkeiten der allgemeinen Theorie durch explizite Aufstellung der allgemeinen Strukturinvarianten für den betreffenden Körpertypus zu erläutern oder auch als Vorbereitung dazu nur etwa eine Ganzheitsbasis,

> die Diskriminante, ein Grundeinheitensystem und die Klassenzahl nach einem systematischen strukturinvarianten Verfahren zu gewinnen, so wird, wenn er ehrlich ist, die Antwort im allgemeinen lauten: nur für die quadratischen Zahlkörper.

Und es erinnert an Kronecker, wenn wir da weiter über die Rollo der Beispiele lesen:

> Mit vollem Recht tritt in der Physik neben die Vorlesung über Experimentalphysik das physikalische Praktikum, in dem das rezeptiv Erlernte in eigener Aktivität befestigt werden soll. Eine ganz entsprechende Rolle hat in der Zahlentheorie die Durchführung numerischer Beispiele. Darüber hinaus sind sie in der Hand des forschenden Mathematikers genau das, was für den Physiker das Experiment ist, nämlich eines der Hauptmittel zur Auffindung neuer Gesetzlichkeiten.

Solche Gedanken sind natürlich nicht neu, denn von ihren Wurzeln her ist die Zahlentheorie zu allen Zeiten auch und vor allem eine induktive Wissenschaft gewesen, von dort her bezieht sie ihre Kraft und den ihr eigenen Reiz. Ein Blick etwa auf die Zahlentheorie der elliptischen Kurven – um ein Beispiel aus der jüngsten Zeit zu nehmen – wird bestätigen, daß diese Feststellung auch heute noch unverändert gilt.

Hasse sagt dann weiter:

> Wie man sich in der Musik nach der in heroischen und dämonischen Werken und in kühnsten Phantasien schwelgenden romantischen und nachromantischen Epoche heute bei aller Freude an diesem Schaffen doch auch wieder stärker auf den Urquell reiner und schlichter Musikalität der alten Meister besinnt, so scheint mir auch in der Zahlentheorie, die ja wie kaum eine andere mathematische Disziplin von dem Gesetz der Harmonie beherrscht wird, eine Rückbesinnung auf das geboten, was den großen Meistern, die sie begründet haben, als ihr wahres Gesicht vorgeschwebt hat.

Damit ist sicherlich nicht gemeint, daß diese Rückbesinnung auch eine solche in der Wahl des Gegenstandes oder der Form seiner Behandlung sein muß. Die Zahlentheorie ist vielmehr trotz ihres Alters erstaunlich vital. Als erstes Beispiel möchte ich abermals die Arithmetik der elliptischen Kurven erwähnen, die Resultate und Vermutungen von Birch, Cassels, Swinnerton-Dyer, Tate und anderen, in denen dieses Gesetz der Harmonie in unübertrefflicher Weise zum Ausdruck kommt. Diese Vitalität kommt jedoch auch dann zum Durchbruch, wenn man – wie Hasse es hier tut – als Gegenstand denjenigen Ideenkreis wählt, aus dem die algebraische Zahlentheorie rund 100 Jahre zuvor entsprang. Um dies etwas deutlicher machen zu können, erlauben Sie mir, daß ich zu guter letzt noch einige mehr persönliche Worte hinzufüge:

Es war im Sommersemester 1948, als ich mich, gerade mein zweites Studiensemester beginnend, in Berlin in Ihre Vorlesung über Elementare Zahlentheorie setzte,

und es war wohl auch Ihre erste Vorlesung in Berlin nach dem Kriege. In der ersten Stunde dieser Vorlesung sprachen Sie, Herr Hasse, mindestens ebensoviel über Musik wie über Zahlentheorie, und beschworen in mir persönlich unvergeßlicher Weise beider innere Verwandtschaft. Ohne daß ich es damals wußte, hatte sich damit für mich entschieden, wohin im Reich der Mathematik mich meine Wünsche ziehen würden.

An diesem Ihrem Programm, als dessen erster Teil die Klassenzahlmonographie gedacht war, habe ich dann mitzuarbeiten versucht. Es handelte sich um die systematische und rechnerische Erschließung der abelschen Zahlkörper, ein – der Zeit entsprechend – durch und durch im besten Sinne konservatives Programm. Dem entsprechen auch meine ersten Beiträge dazu (über Geschlechtertheorie, über Einheitengruppe und Klassenzahl, über die Hauptordnung der ganzen Elemente usw.), alle dafür bestimmt, es realisieren zu helfen, was mir bis zu einem gewissen Grade wohl auch gelungen ist. Spätere Beiträge haben ihre Wurzeln zunehmend auch in der Faszination selbst, die von der analytischen Klassenzahlformel für diese Körper ausgeht. Im Bemühen, sie besser und besser zu verstehen, haben sich am Beispiel dieser Körperklasse Einsichten herausgeschält, deren Bedeutung über die Klasse der absolut abelschen Zahlkörper weit hinausreicht und, welche die Frage nach den Beziehungen zwischen einem Zahlkörper K und seiner Zetafunktion $\zeta_K(s)$, genauer den rationalen Werten dieser Zetafunktion für negativ-ganzzahliges Argument $s = 1 - m$ mit $m \in \mathbb{N}$, völlig neu beleuchten.

Den Ausgangspunkt bildete die Frage, wie sich das klassische Kriterium von Kummer, nach welchem eine Primzahl p genau dann in der Klassenzahl h_K des Körpers $K = \mathbb{Q}^{(p)}$ der p-ten Einheitswurzeln steckt, wenn p im Zähler einer der ersten $\frac{p-3}{2}$ Bernoullischen Zahlen B^{2n} $(n = 1, \ldots, \frac{p-3}{2})$ aufgeht, wie sich dieses rein rationale Kriterium auf beliebige abelsche Zahlkörper übertragen läßt. Die Tatsache, daß es sich bei den B^m entsprechend

$$\zeta_{\mathbb{Q}}(1-m) = -\frac{B^m}{m}$$

um Zetawerte handelt, wenn auch zum „falschen“ Körper $K = \mathbb{Q}$ gehörige, wurde allerdings erst dadurch interessant, daß in einer jüngeren Arbeit auch Artin, Ankeny und Chowla bei der Herleitung von Klassenzahlkongruenzen reeller quadratischer Zahlkörper nach Verzweigungsprimzahlen auf Zetawerte gestoßen waren, anscheinend ohne sie als solche zu erkennen, und zwar wiederum zu einem „falschen“ Körper gehörend. Die Aufklärung dieses merkwürdigen Tatbestands konnte ich dann in der, ganz analog zur analytischen Klassenzahlformel gebildeten und für beliebige reelle abelsche Zahlkörper einerseits und beliebige ungerade, im Grad nicht aufgehende Primzahlen p andererseits gültigen **Klassenzahlformel mod p** geben

$$\frac{2^{n_K-1} h_K R_{K,(p)}}{\sqrt{|d_K|}} \equiv \left(\frac{d_K}{p}\right) \frac{\zeta_K}{\zeta_{\mathbb{Q}}}(2-p) \bmod p;$$

in ihr ist lediglich der klassische Regulator durch den mit Hilfe der *Fermatquotienten* an Stelle der Logarithmen, im übrigen aber analog gebildeten *Restklassenregulator* mod p zu ersetzen. Es war mir klar, daß dies nur eine erste Approximation

des wahren Tatbestands sein konnte. Um ihn im vollen Umfang aufzudecken, habe ich in einer gemeinsamen Arbeit mit Kubota diese rationalen Zetawerte für negatives ganzzahliges Argument benutzt, um die Zetafunktion eines reellen abelschen Zahlkörpers gewissermaßen „ins p-adische“ fortzusetzen. Innerhalb ihres Existenzbereichs hat diese *p-adische Zetafunktion* – wie wir heute wissen: nahezu exakt – dieselben Eigenschaften, gelten für sie dieselben Formeln wie im klassischen „komplexen“ Fall, soweit sich dies irgendwie erwarten läßt. Insbesondere ist die Klassenzahlformel mod p nur die erste Näherung einer *p-adischen Klassenzahlformel*, die man – grob gesagt – durch p-adische Uminterpretation der in die klassische Formel eingehenden Größen erhält, soweit eine solche Uminterpretation überhaupt notwendig ist. Und dies gilt für jede der beiden Versionen dieser Formel, ob mit oder ob ohne „Summation“ der eingehenden $L(1, \chi)$-Werte.

So hat sich das damals von Ihnen, Herr Hasse, begonnene Programm nicht nur im Sinne seiner ursprünglichen Konzeption zu einem guten Teil erfüllen lassen, sondern ist auch die an seinem Anfang stehende Aufgabe, diese Klassenzahlformel besser verstehen zu lernen, zu einem Schlüssel geworden, der neue Türen aufschloß, von deren Vorhandensein damals wohl niemand etwas ahnen konnte. Aber verstehen wir diese faszinierende Formel heute wirklich besser? Denkt man an den großen Bogen, der von der klassischen Formel über deren global-arithmetisch-gruppentheoretische Deutung zu ihrer p-adischen Uminterpretation führt, wohingegen (jedenfalls heute noch) jeder Ansatz fehlt, ihr p-adisches Analogon mit p-adisch analytischen Methoden direkt zu beweisen, so möchte man eher sagen: diese Formel gibt uns mehr Rätsel auf als je zuvor! Um so mehr, als man vermuten muß, daß die hier im abelschen Fall sichtbar gewordenen Zusammenhänge für beliebige totalreelle Zahlkörper gültig sind. Daß es Serre gelungen ist, die Fortsetzbarkeit der Zetafunktion ins p-adische in dieser Allgemeinheit zu beweisen, ist dafür sicherlich wohl mehr als nur ein erster Schritt.

Beginnend mit Ihrer Monographie, Herr Hasse, hat so der wohl älteste Ast am Baum der algebraischen Zahlentheorie einen neuen kräftigen grünen Zweig hervorgebracht. Nehmen wir dies als ein Zeichen für die Vitalität dieses Baumes und wünschen wir dem Jubilar die gleiche (oder doch eine vergleichbare) Lebenskraft, auf daß sein Interesse und seine Schaffenskraft ihm und uns noch lange erhalten bleiben!

Eingegangen am 15. Dezember 1972



Helmut Hasse 1898 - 1979

Briefe 1925–1927

---

1 19.01.1925, Noether an Hasse, Postkarte

Göttingen, 19.1.1925

Sehr geehrter Herr Hasse!

Mit Ihrer Frage nach der Primhauptidealzerlegung meinen Sie wohl, im Hinblick auf Hensel, daß diese Zerlegung für *jedes Ideal* des Rings, nicht nur für *jedes Element*, d.h. jedes Hauptideal erfüllt sein soll.[1] Daß die zweite Forderung viel schwächer ist, zeigt das Beispiel des Polynombereichs von mehr Unbestimmten, wo jedes Element eindeutig in Primelemente zerlegbar ist, während für die Ideale noch alle bei endlicher Kette[2] möglichen Fälle auftreten können.[3]

Im ersten Fall folgt aus der Forderung[4], daß *jedes Ideal Hauptideal* wird, und außerdem die Existenz der Einheit, wenn man Ideale von der Form $(n\mathfrak{a})$ – wo n eine natürliche Zahl – noch als zerlegt betrachtet.

Umgekehrt ergibt sich aus diesen Voraussetzungen[5] auch direkt die gewünschte Zerlegung – und ich glaube auch nicht, daß man hier axiomatisch anders fassen kann. Denn aus der Existenz der Idealbasis folgt der Kettensatz,[6] also wird jedes Ideal Produkt von endlich vielen unzerlegbaren, d.h. solchen die sich nicht als Produkt zweier echter Teiler darstellen lassen. Diese unzerlegbaren sind aber Primhauptideale, denn aus den Voraussetzungen ergibt sich, daß aus Teilbarkeit Produktdarstellung folgt, aus $\mathfrak{a} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{b}}$ folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ mit echtem Teiler $\mathfrak{c}$, wenn $\mathfrak{b}$ vom Einheitsideal verschieden.

Vernünftiger als das oben Mitgeteilte ist eine direkte Axiomatisierung der Henselschen Ringe, worunter ich bei festem π das System aller π-adischen Zahlen von nicht-negativer Ordnung verstehe.[7] Sie genügen den Innsbrucker Bedingungen[8], denn es gibt doch Idealtheorie der ganzen algebraischen Zahlen in ihnen – Ring ohne Nullteiler mit Einheit, Doppelkettensatz nach jedem vom Nullideal verschiedenen Ideal, algebraisch ganz abgeschlossen im Quotientenkörper – und außerdem der zusätzlichen nur *ein* vom Einheits- und Nullideal verschiedenes Primideal zu besitzen. Genügt umgekehrt ein Ring diesen Bedingungen, so wird jedes vom Null- und Einsideal verschiedene Ideal von der Form $\mathfrak{p}^r$; ist nun $\pi \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, aber $\pi \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$, so wird also das mit π gebildete Hauptideal notwendig gleich $\mathfrak{p}$; es handelt sich um einen Hauptidealring, und zwar einen Henselschen. – Diese Bemerkung gibt zugleich den Grund, warum jedes Ideal im algebraischen Zahlkörper mod einem festen Ideal zum Hauptideal wird; denn stellt man den Restklassenring nach dem festen Ideal als direkte Summe primärer dar so gibt es hier wieder nur Ideale der Form $\mathfrak{p}^r$, also Hauptideale. Direkte Summen „verallgemeinerter" zyklischer Gruppen, die zu verschiedenen Primäridealen gehören, sind aber wieder zyklisch. (Man kann, wie sich Krull[9] jetzt überlegt hat, die Henselschen Ringe einfach gewinnen, indem man den Ring der ganzen Zahlen durch Quotientenbildung durch alle durch ein festes Primideal nicht teilbare Zahlen zu einem neuen Ring erweitert.)

Ich habe in Ihrer Arbeit[10] auch das Zitat auf die Krull-Arbeit noch nicht eingefügt, was Sie wohl noch bei der Korrektur nachholen.

Mit besten Grüßen, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 19.1.1925

[1]Die vorliegende Postkarte beantwortet offenbar eine Anfrage von Hasse. Der Wortlaut dieser Frage ist uns nicht bekannt. Aus Noethers Antwort kann man schließen, dass Hasse nach einer Axiomatisierung derjenigen Integritätsbereiche fragte, in denen der Satz von der Primhauptidealzerlegung gilt (wobei Noether sogleich feststellt, dass diese Frage auf zweierlei Weise interpretiert werden kann). Hasse hatte sich zuvor kaum für Axiomatisierung interessiert, soweit wir feststellen konnten; es ist anzunehmen, dass er von dem Vortrag von Emmy Noether auf der DMV-Tagung in Innsbruck im September 1924 sehr beeindruckt war und nun begann, sich selbst mit solchen Fragestellungen zu befassen.

Noether hatte in Innsbruck die axiomatische Charakterisierung der heute so genannten „Dedekind-Ringe“ vorgetragen, also derjenigen Ringe, bei denen jedes Ideal sich eindeutig in ein Produkt von Primidealen zerlegt; dazu gehören insbesondere die Hauptordnungen der algebraischen Zahlkörper endlichen Grades. (Siehe [Noe25], [Noe26a].) Demgegenüber versucht nun Hasse, diejenigen Ringe axiomatisch zu charakterisieren, in denen der Satz von der eindeutigen (bis auf Einheitsfaktoren) Zerlegung in Primelemente gilt, kurz: ZPE-Ringe.

Es ist nicht klar, was Noether meint, wenn sie in diesem Zusammenhang Hensel erwähnt. Möglicherweise hatte Hasse diesen Namen in seiner Anfrage genannt. Jedenfalls scheint Noether das auf die von ihr so genannten „Henselschen π-adischen Ringe“ zu beziehen, das sind die Komplettierungen der Hauptordnungen der algebraischen Zahlkörper endlichen Grades. Diese sind diskrete Bewertungsringe, für die Noether weiter unten eine idealtheoretische Charakterisierung liefert. Wir haben jedoch den Eindruck, dass Hasses Interesse in diesem Zusammenhang nicht hauptsächlich den Hauptidealringen oder diskreten Bewertungsringen gegolten hat, sondern den ZPE-Ringen. Vgl. dazu den Brief vom 11.12.1926.

[2]D.h. in Ringen, bei denen jede aufsteigende Idealkette endlich ist, also in „Noetherschen Ringen“ gemäß der heutigen Terminologie.

[3]Es ist nicht ganz klar, was Noether meint, wenn sie sagt, dass „alle möglichen Fälle auftreten können“. Eine mögliche Interpretation ist, dass es in Polynombereichen von mehr Unbestimmten Ideale gibt, deren minimale Erzeugendenzahl beliebig groß wird (wenn die Anzahl der Unbestimmten hinreichend groß ist).

[4]Gemeint ist die Forderung des ersten Falles, dass also jedes Ideal als Produkt von Primhauptidealen darstellbar ist.

[5]Nämlich den soeben genannten Eigenschaften, also: Jedes Ideal ist Hauptideal und die Existenz eines Einselements (= „Einheit“ in der Noetherschen Terminologie)

[6]Der Noethersche „Kettensatz“ besagt, dass jede aufsteigende Kette von Idealen nach endlich vielen Schritten abbricht.

[7]Aus den nachstehenden Ausführungen geht hervor, dass Noether damit den Bewertungsring einer diskreten Bewertung in dem zugrundeliegenden Körper meint. Es geht ihr also um eine ringtheoretische Beschreibung der diskreten Bewertungsringe. – Mit π bezeichnet sie ein Primelement der Bewertung.

[8]„Innsbrucker Bedingungen“: Das sind die bekannten Noetherschen Axiome für einen Dedekindschen Ring. Noether hatte darüber auf der Innsbrucker DMV-Tagung 1924 vorgetragen. Ihre große Arbeit „Abstrakter Aufbau der Idealtheorie“[Noe26a] dazu erschien allerdings erst im darauffolgenden Jahr; vielleicht ist das der Grund, weshalb sie diese Axiome hier im einzelnen aufzählt, damit Hasse versteht, was sie meint. – Vgl. dazu auch den Brief vom 3. 11. 1926.

[9]Wolfgang Krull war zum Zeitpunkt des vorliegenden Briefes als Privatdozent in Freiburg tätig. Als Student war er 1920/21 in Göttingen, wo er sich dem Kreis um Emmy Noether anschloss. Seitdem hielt er engen mathematischen Kontakt mit ihr. Der starke Einfluss von Emmy Noether

auf das mathematische Werk von Krull ist unverkennbar. Die Idealtheorie Noethers wurde später in den Ergebnisband von Krull über Idealtheorie [Kru35] aufgenommen.

[10]Hier handelt es sich um Hasses Arbeit „Zwei Existenztheoreme über algebraische Zahlkörper", die 1925 in den Mathematischen Annalen erschien [Has25]. Emmy Noether fungierte als inoffizielles Redaktionsmitglied der Mathematischen Annalen. Die Arbeit war vom Autor (also Hasse) am 15. Dezember 1924 datiert worden, und trägt das Eingangsdatum vom 16. 12. 1924. Demnach hatte Hasse sein Manuskript am 15.12.1924 an Emmy Noether geschickt, bei der es am 16.12. eingegangen war. Zum Zeitpunkt des vorliegenden Briefes war die Arbeit offenbar schon zur Publikation angenommen worden, und es ging nur noch um die Einfügung eines Zitats. Hasse hat dies Zitat in der Tat bei der Korrektur eingefügt; es steht auf der ersten Seite der Hasseschen Arbeit. Dort beantwortet Hasse nämlich eine von Krull aufgeworfene Frage, und es ging um das Zitat der zugehörigen Arbeit von Krull [Kru24]. – Diese Arbeit Hasses (oder genauer: die Tatsache, dass Noether diese Arbeit kannte) sollte sich später als der Auftakt für die Kooperation von Hasse und Noether auf dem Gebiet der Algebren erweisen. Siehe Noethers Postkarte vom 4.10.1927.

---

2 03.11.1926, Noether an Hasse

Göttingen, 3. 11. 26

Lieber Herr Hasse!

Ich freue mich sehr daß Sie meine Diskriminantenarbeit[1] mit soviel Interesse und Vergnügen gelesen haben; auch für die – sehr wichtige – Einfügung „und Verknüpfungsbeziehung" [2] besten Dank. Einstweilen hat Grell[3] vor, sich an die Verzweigungstheorie[4] zu machen; mit seiner Normentheorie in beliebigen Ordnungen hat er ja eine gute Vorarbeit dazu[5]; hier gilt meine Vermutung, daß Länge der Kompositionsreihe anstelle des Exponenten tritt. Es scheint aber nicht leicht zu sein, die wirklich naturgemäßen Begriffe zu finden; hat man die erst einmal, so wird die Theorie vermutlich auch durchsichtiger sein als die jetzt bekannte für die Hauptordnung.[6]

Nun zu Ihren Fragen! Bei den symmetrischen Funktionen – der Beweis stammt übrigens von Furtwängler und van der Waerden erzählte ihn mir nur – haben Sie vergessen, $\overline{a}$ durch a zu ersetzen. Es ist einfach so: Ist $S(x_1,\dots,x_n)$ symmetrisch, so wird $S(x_1,\dots,x_{n-1},0) = G(\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_{n-1})$. Ich bilde die *symmetrische* Funktion $H(x_1,\dots,x_{n-1}) = S(x_1,\dots,x_n) - G(\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_{n-1})$; es wird $H(x_1,\dots,x_{n-1},0) = 0$ wegen $a_i(x_1,\dots,x_{n-1},0) = \overline{a}_i$; also durch x_n und damit durch a_n teilbar, womit die gewünschte Graderniedrigung gewonnen ist.[7]

Zu Axiom V.[8] *Voraussetzungen und Bezeichnungen*: R sei ein den fünf Axiomen genügender Ring, K sein Quotientenkörper; $\mathfrak{o}$ das Einheitsideal und $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Ideal in R. Weiter bedeute $\mathfrak{o} : \mathfrak{p}$ den *in K genommenen* Quotienten der beiden R-Moduln (Ideale) $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{p}$, also alle Elemente σ aus K, sodaß $\mathfrak{p}\sigma \equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}}$, also *ganz* in R. Es gilt also, wenn man alles als R-Moduln in K auffaßt: $\mathfrak{p}\cdot(\mathfrak{o}:\mathfrak{p}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}}$ und weiter $\mathfrak{p} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}\cdot(\mathfrak{o}:\mathfrak{p})}$; die zweite Bedingung folgt aus $\mathfrak{o} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}:\mathfrak{p}}$ durch Multiplikation mit $\mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ keinen vom Einheitsideal verschiedenen

echten Teiler in R besitzt (Axiom I, II, III), sind also – da $\mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p})$ in R – nur die beiden Möglichkeiten: $\mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p}) = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. Es ist zu zeigen:
1) Aus $\mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p}) = \mathfrak{o}$ folgt $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^\rho$;[9]
2) $\mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ ist bei ganzer Abgeschlossenheit ausgeschlossen.

Ad 1) Aus $\mathfrak{q} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ folgt $\mathfrak{q} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p})} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}}$, also ganzes Ideal.

Dabei hat der Exponent[10] um genau eine Einheit abgenommen; denn aus $\mathfrak{p}^\rho \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$ folgt $\mathfrak{p}^\rho \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{\rho-1} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p})}$ und umgekehrt. Es wird also $\mathfrak{q} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p})^\rho = \mathfrak{o}$, da bei positivem Exponent Teilbarkeit durch $\mathfrak{p}$, somit ganzes Ideal vorliegt.[11]

Anders ausgedrückt: $\mathfrak{o} : \mathfrak{p}$ ist das zu $\mathfrak{p}$ inverse Element $\mathfrak{p}^{-1}$ im Sinn der aus den Idealen gebildeten multiplikativen Gruppe.

Ad 2) Es ist hier zu zeigen: 2_a) Jedes Element von $\mathfrak{o} : \mathfrak{p}$ hängt ganz von R ab; 2_b) $(\mathfrak{o} : \mathfrak{p})$ enthält nicht zu R gehörige Elemente; R kann also bei Voraussetzung 2) nicht ganz abgeschlossen sein.

2_a): Üblicher Determinantenschluß: Sei $p_1, \ldots, p_k$ eine Idealbasis (R-Modulbasis) von $\mathfrak{p}$; und σ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{o} : \mathfrak{p}$; dann sagt die Voraussetzung:

$$\begin{aligned} \sigma p_1 &= a_{11} p_1 + \ldots + a_{1k} p_k; \\ &\vdots \\ \sigma p_k &= a_{k1} p_1 + \ldots + a_{kk} p_k, \end{aligned}$$

also, da R ein Ring ohne Nullteiler und die $a_{\mu\nu}$ aus R:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & & a_{\mu\nu} \\ & \ddots & \\ a_{\mu\nu} & & a_{kk} - \sigma \end{vmatrix} = 0; \quad \text{ganze Abhängigkeit.}$$

2_b) Sei p beliebiges Element aus $\mathfrak{p}$; dann gilt für das aus p abgeleitete Hauptideal $\mathfrak{o}p$ nach Axiom I, II, III die Zerlegung in Primärkomponenten $\mathfrak{o}p = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{a}$ das Produkt der nicht zu $\mathfrak{p}$ gehörigen bezeichnet. Sei $\mathfrak{q}$ vom Exponenten ρ (wegen $p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist ρ sicher > 0), also $\mathfrak{p}^{\rho-1}\mathfrak{a} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}p}$ und somit t ein Element aus $\mathfrak{p}^{\rho-1}\mathfrak{a}$, für das $t \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}p}$ gilt.

Das heißt aber, daß t/p nicht zu R gehört; aber aus $t \equiv 0(\mathfrak{p}^{\rho-1}\mathfrak{a})$ folgt $t\mathfrak{p} \equiv 0(\mathfrak{o}p)$ oder $t/p \equiv 0(\mathfrak{o} : \mathfrak{p})$, womit das gewünschte Element konstruiert ist.

Hier ist nun wirklich alles auf den Begriff der ganzen Abgeschlossenheit reduziert, und völlig naturgemäß. Zur Umkehrung[12] geht Krull auf den Quotientenring $R_\mathfrak{p}$ über, der entsteht, indem man alle zu $\mathfrak{p}$ primen Elemente in den Nenner aufnimmt. Dieser muß Hauptidealring werden, da es jetzt nur zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale gibt, und kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ (Vergl. meine Diskriminantenarbeit, S. 102 oben[13]). Als Hauptidealring ohne Nullteiler ist $R_\mathfrak{p}$ ganz abgeschlossen; da dies für *jedes* $\mathfrak{p}$ gilt, gilt es auch für R. Mir scheint, daß man hier doch meine Schlüsse mit der abelschen Gruppe heranziehen muß; daß die ganzen und gebrochenen Ideale eine Abelsche Gruppe bilden, ist ja durch $\mathfrak{o} : \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{-1}$ bewiesen.

Krull hat den Übergang von allen $R_\mathfrak{p}$ zu R mir nicht mehr geschrieben. Aber man muß doch zeigen, daß bei *jeder* Darstellung $\sigma = a/b$ eines *nicht* zu R gehörigen Elementes mindestens *ein festes* $\mathfrak{p}$ im Nenner auftritt; daß σ also nicht zu dem betreffenden $R_\mathfrak{p}$ gehören kann. (Besser ausgedrückt: gehört σ nicht zu R, so gibt es mindestens ein $\mathfrak{p}$, sodaß σ nicht zu $R_\mathfrak{p}$ gehört (gilt schon bei Axiom I bis IV, aber komplizierter zu beweisen; Krull baut seine verallgemeinerten $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen darauf auf). Entschuldigen Sie diesen improvisierten Abschluß!) Immerhin wird auch die Umkehrung kürzer! [14]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Zum improvisierten Schluß! Man beweist den Satz einfach so:

Voraussetzung: Für R gelten Axiome I bis IV; $R_\mathfrak{p}$ besteht aus allen und nur solchen Quotienten $\sigma = a/b$, wo a und b aus R, für die $b \not\equiv 0(\mathfrak{p})$.

Behauptung: *R ist Durchschnitt aller $R_\mathfrak{p}$.*[15]

R ist im Durchschnitt aller $R_\mathfrak{p}$ enthalten; also nur noch zu zeigen: gehört σ nicht zu R, so gibt es ein $R_\mathfrak{p}$ zu dem σ nicht gehört; d.h. ein $\mathfrak{p}$ derart daß *jeder Nenner* von σ durch $\mathfrak{p}$ teilbar. (Alle $R_\mathfrak{p}$ im Quotientenkörper enthalten).

Sei also $\sigma = a/b = c/d$ und a in R nicht durch b teilbar. Es wird aber ad in R durch b teilbar. Unter den Primärkomponenten von $b = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_t$ muß mindestens *eine* sein, etwa $\mathfrak{q}$, sodaß $a \not\equiv 0(\mathfrak{q})$; da sonst a durch b – das kleinste gemeinsame Vielfache – teilbar wäre. Aus $ad \equiv 0(\mathfrak{q})$ und $a \not\equiv 0(\mathfrak{q})$ folgt aber $d \equiv 0(\mathfrak{p})$ nach Definition des Primärideals. Also tritt sicher $\mathfrak{p}$ in jedem Nenner auf; σ gehört nicht zu $R_\mathfrak{p}$.

Also auch bei Axiom I bis IV: Ein Element ist dann und nur dann ganz, wenn es an allen endlichen „Stellen“ ganz.

[Der folgende Text von Hasses Handschrift auf der Rückseite eines Blattes]

Ausführlicher Beweis zu S. 3 des beiliegenden Briefes.
Behauptung: $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^\rho$.

Nach Schluß auf Seite 2 unten ist $\mathfrak{q}(\mathfrak{o} : \mathfrak{p})$ ganz, primär, zu $\mathfrak{p}$, also entweder $= \mathfrak{o}$ und dann $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ $(\rho = 1)$ oder $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q}(\mathfrak{o} : \mathfrak{p})$; dann nach Schluß auf Seite 2 unten $\mathfrak{q}(\mathfrak{o} : \mathfrak{p})^2$ ganz, primär, zu $\mathfrak{p}$, also entweder $= \mathfrak{o}$, dann $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^2$ oder $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q}(\mathfrak{o} : \mathfrak{p})^2$; dann $\mathfrak{q}(\mathfrak{o} : \mathfrak{p})^3$ ganz .... Da nicht für beliebig hohes ρ gelten kann: $\mathfrak{q}(\mathfrak{o} : \mathfrak{p})^{\rho+1}$ ganz, weil sonst $\mathfrak{p}^{\rho+1} \mid \mathfrak{q}$ folgte, während doch $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{p}^\rho$ ist, so muß nach endlich vielen Schritten $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^\rho$ folgen.

Anmerkungen zum Dokument vom 3.11.1926

[1]Emmy Noether hatte ihr Manuskript [Noe27] zur Diskriminantenarbeit im März 1926 dem Crelleschen Journal zur Publikation eingereicht. Hasse war damals schon Herausgeber des Crelleschen Journals und hat die Noethersche Arbeit offenbar genau durchgesehen. Die Arbeit kann als eine Fortsetzung der großen Arbeit [Noe26c] betrachtet werden, in der sie die heute so genannten *Dedekindschen Ringe* axiomatisch charakterisiert hatte. (Die Noetherschen Axiome dazu kommen weiter unten in diesem Brief zur Sprache, wurden jedoch schon in der vorangegangenen Postkarte vom 19.1.1925 erwähnt.) In der hier zur Diskussion stehenden Arbeit betrachtet Noether einen Dedekindschen Ring R und eine R-Ordnung T in einem separablen Erweiterungskörper; in

dieser Situation werden die Primteiler der (Relativ-)Diskriminante von $T|R$ charakterisiert – in Verallgemeinerung des klassischen Dedekindschen Satzes für Hauptordnungen in Zahlkörpern.

[2]Noether hatte geschrieben, dass ein Ring durch seine „Gleichheitsbeziehungen“ festgelegt sei; dies hatte Hasse ergänzt durch „Gleichheits- und Verknüpfungsbeziehungen“. (Siehe die Zeilen 4 und 5 auf Seite 85 in [Noe27].) Das war damals nicht trivial, denn der abstrakte Begriff eines axiomatisch definierten Ringes war erst wenige Jahre zuvor von Emmy Noether eingeführt worden, nämlich in ihrer Arbeit über Ringe mit Maximalbedingung [Noe21].

[3]Heinrich Grell gehörte zu dem engeren Schülerkreis von Emmy Noether. Auf der Jahrestagung der DMV 1930 in Prag trug er über Verzweigungstheorie von Ordnungen vor [Gre30b], jedoch hat er die Details der dort berichteten Resultate nicht voll publiziert; erst viel später erschien in der Mathematischen Zeitschrift eine Arbeit von ihm zur Verzweigungstheorie der Ordnungen [Gre36].

[4]In der Einleitung zu ihrer Arbeit bemerkt Emmy Noether, dass ihr Diskriminantensatz „*nur den ersten Satz einer allgemeinen Verzweigungstheorie der Ordnungen darstellen kann*“, und sie vergleicht die Situation mit der Hilbertschen Verzweigungstheorie in Zahlkörpern, wo es auf die Verzweigungs-Exponenten der Primideale ankommt. Noether wiederholt in diesem Brief die in der Arbeit aufgestellte Vermutung, dass in der allgemeinen Verzweigungstheorie die Länge an die Stelle des Exponenten treten wird. – Heute würden wir die Ordnung T als den Ring eines „singulären Punktes“ einer „arithmetischen Kurve“ ansehen, wobei sich die Verzweigungstheorie unterordnet unter den Begriff „Klassifikation der Singularitäten.“

[5]Vgl. [Gre30a].

[6]Wir sehen hier an einem Beispiel explizit den Noetherschen Leitsatz formuliert, der ihr gesamtes Schaffen durchzieht, nämlich (wie van der Waerden es in seinem Nachruf formuliert hat): „*Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operatoren werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objekten losgelöst und auf begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt sind.*“

[7]Es handelt sich um ein Detail im Beweis des Hauptsatzes über symmetrische Funktionen. Hasse war damals gerade dabei, den 2. Band seines Göschen-Bändchens „Höhere Algebra“[Has27c] zu schreiben. (Der erste Band [Has26b] war bereits erschienen.) Darin sollte die Galoistheorie behandelt werden, und zwar zum ersten Mal in einem Lehrbuch im Rahmen der abstrakten Körpertheorie nach Steinitz. Wahrscheinlich hatte Hasse zunächst vor, die Galoistheorie unter Benutzung des Hauptsatzes über symmetrische Funktionen aufzubauen, so wie es damals weithin üblich war. Emmy Noether hatte ihm dazu von einem Beweis berichtet, den sie von van der Waerden gehört hatte. Hasse hatte ihr nun offenbar eine Ausarbeitung dieses Beweises geschickt, und in dem Brief gibt sie kritische Kommentare dazu. Gleichzeitig macht sie ihn darauf aufmerksam, dass dieser Beweis nicht von van der Waerden, sondern von Furtwängler stammt.

Wie wir aus der Korrespondenz Hasse-Furtwängler entnehmen konnten, hat sich Hasse daraufhin an Furtwängler gewandt und um die Erlaubnis gebeten, jenen Beweis in sein Buch aufzunehmen. Dieser antwortete in einem Brief vom 9. Nov. 1926: „*Sehr geehrter Herr Hasse! Ich bin gerne damit einverstanden, dass Sie meinen Beweis in Ihr Buch aufnehmen. Da ich auch noch einige andere Dinge anders behandle als es gewöhnlich geschieht, gebe ich kurz an, wie ich diesen Abschnitt meiner Algebravorlesung erledige ...*“

In der publizierten Version von Hasses Buch wird jedoch der Satz von den symmetrischen Funktionen beim Aufbau der Galoistheorie ausdrücklich vermieden; er wird zwar formuliert aber für seinen Beweis wird auf Band 3 verwiesen. (Ein dritter Band ist allerdings niemals erschienen). Hasse erwähnt dort ausdrücklich, dass jener Beweis von Furtwängler stammt, wie es Emmy Noether in diesem Brief berichtet. – Vgl. dazu auch die Anmerkungen zu der folgenden Postkarte vom 10. 11. 26.

[8]Es handelt sich um das fünfte „Innsbrucker Axiom“ Noethers. Die anderen Axiome I-IV besagen in heutiger Terminologie, dass die folgenden Bedingungen (i) und (ii) für R erfüllt sind; das Noethersche Axiom V besagt die Ganzabgeschlossenheit, also (iii):

(i) R ist ein Noetherscher Integritätsbereich.
(ii) Jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$ von R ist maximal.
(iii) R ist ganzabgeschlossen.

Noether gibt hier einen Beweis dafür, dass unter der Voraussetzung (i) und (ii) die Bedingung (iii) gleichbedeutend ist mit:

(iv) Jedes Primärideal $\mathfrak{q}$ ist eine Potenz des zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}$.

(Hieraus ergibt sich in der Tat leicht, dass jedes Ideal eindeutig ein Produkt von Primidealpotenzen ist.)

Im Grunde ist der Beweis dafür bereits in der Noetherschen Arbeit [Noe26a] enthalten; diese Arbeit war zum Zeitpunkt der Abfassung des vorliegenden Briefes schon erschienen. Noether hätte also einfach auf ihre Arbeit verweisen können. Dass sie es nicht tut, hat seinen Grund darin, dass der jetzt vorliegende Beweis einfacher ist, offenbar zurückgehend auf eine Idee von Krull, der ja weiter unten im Brief auch zitiert wird. Die dazugehörige Krullsche Arbeit [Kru28] war damals noch nicht erschienen. Anscheinend hatte Hasse von der Krullschen Vereinfachung gehört und hatte Noether gebeten, ihm diese zu erläutern.

Die Noetherschen Ausführungen in diesem Brief sind im wesentlichen dieselben wie bei Krull [Kru28], außer dass Krull sofort zu dem Quotientenring $R_{\mathfrak{p}}$ in Bezug auf ein Primideal $\mathfrak{p}$ übergeht, während Noether diese Quotientenring-Methode zunächst nicht benutzt; erst am Schluss spricht Noether vom Quotientenring und verweist dazu auf Krull. Offenbar war damals der Übergang von einem Ring zu einem Quotientenring noch nicht so geläufig wie heute; das entnimmt man auch der Tatsache, dass Noether ihrem Schüler Heinrich Grell die Aufgabe gestellt hatte, die idealtheoretische Situation bei einem solchen Übergang systematisch darzustellen; vgl. [Gre27a].

Diese Briefstelle ist also so zu verstehen, dass Noether ihren Briefpartner Hasse auf Anfrage über den neuesten Stand der Entwicklungen bei Dedekindschen Ringen informieren möchte.

Im Zusammenhang damit erscheint die folgende Äußerung von van der Waerden interessant, welche die damalige Situation widerspiegelt. In [vdW75] berichtet er über die Quellen seines Buches „Moderne Algebra.“ Er hatte die Noethersche Theorie der Dedekind-Ringe in den Band 2 aufgenommen (der 1931 in erster Auflage erschienen war) und sagt darüber: „*Emmy Noether's proofs were simplified, making use of ideas of Krull contained in* §3 *of Krull's paper* [Kru28]. *Emmy Noether was a referee for this paper, and she told Artin about it. Artin simplified Krull's proof and presented it in a seminar in Hamburg, in which I participated. Artin's simplified proof was reproduced in* §100.“ (Hier bezieht er sich auf §100 der ersten Auflage der „Modernen Algebra“.)

Demnach finden wir in diesem Brief ein Zwischenstadium des Beweises, zwischen der Krullschen und der Artinschen Vereinfachung, welch letztere dann Eingang in die van der Waerdensche Algebra gefunden hat.

[9] Hierbei bedeutet $\mathfrak{q}$ ein beliebiges zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal.

[10] Da $\mathfrak{q}$ als Primärideal zu $\mathfrak{p}$ vorausgesetzt wird, so gibt es ein $\rho \geq 0$ derart, dass $\mathfrak{p}^{\rho} \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}$; das kleinste solche ρ nennt Noether „den Exponenten“ von $\mathfrak{q}$.

[11] Randbemerkung von der Hand Hasses: *„Siehe ausführlich auf der Rückseite des beiliegenden Blattes.“* Wir geben die auf der Rückseite befindlichen Ausführungen Hasses am Schluss dieses Briefes wieder.

[12] Die „Umkehrung“, die Noether hier beweist, besagt folgendes: *Wenn für einen Integritätsbereich R jedes Ideal $\neq 0$ eindeutig als Produkt von Primidealpotenzen darstellbar ist, dann ist R ganzabgeschlssen.*

[13] Auf Seite 102 oben der Diskriminantenarbeit [Noe27] findet sich der Satz: *Besitzt ein Multiplikationsring $\mathfrak{H}$ nur ein vom Null- und Einheitsideal verschiedenes Primideal, so wird $\mathfrak{H}$ Hauptidealring.* Dabei versteht Noether unter „Multiplikationsring“ einen Integritätsbereich, in dem die von 0 verschiedenen Ideale bei der Ideal-Multiplikation eine Gruppe bilden; heute spricht man von einem „Dedekindschen Ring“. Übrigens hatte Noether denselben Satz schon in der vorangegangenen Postkarte vom 19. 1. 1925 behandelt; anscheinend erinnert sie sich nicht mehr daran.

[14] Noether meint „kürzer als in meiner Arbeit [Noe26a]“.

[15] Heute wissen wir, dass diese Durchschnittsrelation für *jeden* Integritätsbereich R und seine Quotientenringe $R_{\mathfrak{p}}$ zutrifft, wenn $\mathfrak{p}$ die maximalen Ideale von R durchläuft.

3 10.11.1926, Noether an Hasse, Postkarte

Göttingen, 10. 11. 26

Lieber Herr Hasse!

Ich möchte Ihnen doch auch noch den Galoisschen Beweis für die Existenz des primitiven Elements zur eventuellen Aufnahme in Ihr Buch angeben.[1] Bei Galois (in seiner großen Abhandlung über die Auflösung durch Radikale) steht er für den Fall, daß es sich um Adjunktion verschiedener Wurzeln derselben Gleichung handelt, was im Prinzip das Gleiche ist.

Voraussetzung: Der Körper K enthält unendlich viele Elemente; $K(a,b)$ ist Erweiterung 1. Art[2]; zu zeigen: $K(a,b) = K(c)$.

Seien $f(x)$ bzw. $g(x)$ die in bezug auf K irreduziblen Polynome mit den Nullstellen a und b, die also – in passenden Erweiterungskörpern – in getrennte Linearfaktoren zerfallen. Seien $a = a_1, a_2, \ldots, a_n$ die verschiedenen Nullstellen von $f(x)$, $b = b_1, b_2, \ldots, b_m$ diejenigen von $g(x)$. Es sei s aus K so gewählt, daß $a_i + sb_k$ alle voneinander verschieden sind.

Das bedeutet aber: setze ich $j = a + sb$, so verschwindet das Produkt $F(x) = (j - (a + sx))(j - (a_2 + sx)) \cdots (j - (a_n + sx))$ nur für die eine Nullstelle $x = b$ von $g(x)$. Nun ist aber $F(x) = f(j - sx)$ ein Polynom aus $K(j)$, das also mit $g(x)$ aus $K(j)$ nur den Linearfaktor $(x - b)$ gemein hat; somit liegt b in $K(j)$ und also auch a.

Ich finde diesen Beweis, der *keinen* Satz über die Darstellung durch symmetrische Funktionen benutzt, viel schöner als den üblichen von Lagrange! So viel ich sehe – genau durchdacht habe ich es nicht – wird damit der Satz von den symmetrischen Funktionen nirgends in der Galoisschen Theorie benutzt.

Den Schluß:[3] $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^{\varrho}$ hatte ich zusammengefaßt in der Bemerkung: der Exponent von $\mathfrak{q} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p})$ hat um genau eine Einheit abgenommen; also wird $\mathfrak{q} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p})^{\varrho}$ vom Exponenten Null und ganz, somit gleich $\mathfrak{o}$. (Denn aus $\mathfrak{p}^{\varrho} \equiv 0\,(\mathfrak{q})$ folgt $\mathfrak{p}^{\varrho} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p}) \equiv 0\,(\mathfrak{q} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p}))$ und aus $\mathfrak{p}^{\sigma} \equiv 0\,(\mathfrak{q} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p}))$ folgt $\mathfrak{p}^{\sigma+1} \equiv 0\,(\mathfrak{q})$). Es ist im Prinzip Ihr Schluß.

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 10.11.1926

[1]Es handelt sich hier wieder um den Band 2 der Hasseschen „Höheren Algebra“ [Has27c]. Der folgende Beweis, der, wie Noether berichtet, von Galois stammt, wurde von Hasse tatsächlich mit dem Hinweis auf Galois in sein Buch aufgenommen. In diesem Beweis wird die Benutzung symmetrischer Funktionen vermieden, um die es noch in dem vorangegangenen Brief vom 3. 11.26 ging. – Es scheint so, dass Hasse diesen Beweis an Furtwängler schickte, zusammen mit der

Mitteilung, dass er sich nun entschlossen habe, in seinem Buch den Satz über primitive Elemente nach dieser Methode darzustellen, um damit die Benutzung der symmetrischen Funktionen zu vermeiden. Denn in einer Postkarte vom 23. 11. 1926 antwortet Furtwängler: „*Sehr geehrter Herr Hasse, der von Ihnen im Anschluss an eine Mitteilung von Emmy Noether mitgeteilte Beweis des Satzes $K(\alpha, \beta) = K(\vartheta)$ ist mir wohlbekannt, da ich ihn in meiner Vorlesung immer in dieser Art, ohne Benutzung des Satzes von den symmetr. Fkt. abgeleitet habe. Den Satz über die symmetr. Fkt. habe ich um seiner selbst willen und zur Verwendung bei allgemeineren Resolventenbildungen bewiesen.*“

[2]„Erweiterung 1. Art“ bedeutet „separable Erweiterung“. Die Terminologie „separabel“ wurde von van der Waerden in seinem Lehrbuch „Moderne Algebra“ [vdW30] eingeführt. Bis dahin verwendete man die von Steinitz in seiner großen Arbeit „Algebraische Theorie der Körper“ [Ste10] eingeführte Bezeichnung „1. Art“.

[3]Hier geht es wieder um die Konsequenzen aus dem „Innsbrucker Axiom“ V. Offenbar hatte Hasse geschrieben, dass er sich den Schluss $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^{\rho}$ erst noch genauer hat überlegen müssen (vgl. den vorangehenden Brief vom 3.11.), und dies ist Noethers Antwort darauf.

---

4 17.11.1926, Noether an Hasse

Göttingen, 17. 11. 26

Lieber Herr Hasse!

Ich habe mir überlegt, daß ich tatsächlich bei meinen letzten Vorlesungen *ohne* den Satz von den symmetrischen Funktionen ausgekommen bin[1], allerdings kommen dann Ihre Sätze I und II erst *nach* dem Fundamentalsatz; normal wird als „mit allen Konjugierten identisch“ definiert; was vermöge Satz II mit Ihrer Definition übereinstimmt. Ich will Ihnen dies skizzieren, weil der Fundamentalsatz so sehr rasch dabei herauskommt; ob es aber nicht für Ihr Manuskript zu viel Änderung verlangt, weiß ich nicht.[2]

Definition: 1) Zwei endliche Erweiterungen (Körper) L_1 und L_2 von K heißen *äquivalent* in bezug auf K, wenn sie derart isomorph abbildbar sind, daß für K die identische Abbildung resultiert.

2) Zwei endliche Erweiterungen L_1 und L_2, die äquivalent in bezug auf K sind, heißen *konjugiert* (in bezug auf K), wenn es einen L_1 und L_2 gemeinsam umfassenden Körper gibt.

3) Eine endliche Erweiterung L von K heißt *normal*, wenn sie mit ihren Konjugierten identisch ist. Das System der Automorphismen von L, die für K die Identität ergeben, die galoissche Gruppe.

Satz vom primitiven Element: Ist L eine endliche Erweiterung *erster* Art von K, so ist L einfach, $L = K(z)$ (Galois-Beweis).

Hauptsatz. Ist L normal und endlich über K, so ist der Grad $[L : K]$ gleich der Ordnung der galoisschen Gruppe G.

Denn ist $L = K(z)$, so ist die Gruppe durch $(z \sim z)$, $(z \sim z')$, ... gegeben; da z bei jedem Automorphismus in eine konjugierte Wurzel übergehen muß, und demselben z' derselbe Automorphismus entspricht.

Erste Hälfte des Fundamentalsatzes. Ist M Zwischenkörper von K und L, und H die größte Untergruppe die M invariant läßt, so besteht M aus der Gesamtheit der gegenüber H invarianten Elemente. Denn es wird L normal über M, und H gleich der Gruppe L/M. Wäre M' eine Erweiterung von M, die ebenfalls H gestattet, so würde der Grad $[L : M]$ gleich $[L : M']$ werden, nach dem Hauptsatz; da die Gruppen beidemal H. Somit kommt $M' = M$.

Zweite Hälfte des Fundamentalsatzes. Ist H Untergruppe, M der Invariantenkörper von H, so besteht H aus der Gesamtheit der Automorphismen, die M gestattet. Denn das Produkt $\prod_H (t - z)$ gestattet bei unbestimmtem t nur H; also auch bei passender Spezialisierung von t auf K (hier werden wieder unendlich viele Elemente in K vorausgesetzt, wie beim Beweis vom primitiven Element).

Beides zusammen ergibt den Fundamentalsatz. (Immer Erweiterung 1. Art vorausgesetzt!)

Folgen I. Ist β beliebig in L, so gehört das Produkt $(x - \beta)(x - \beta') \cdots (x - \beta^{(v)})$ über alle *verschiedenen* Werte von β zu K. Denn *dieses* gestattet die *ganze* Gruppe, wie die Zerlegung in Nebengruppen zeigt.

II. Der Körper $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ ist normal, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ die sämtlichen Wurzeln einer irreduziblen Gleichung bedeuten. Denn jeder Isomorphismus ruft im konjugierten Körper nur eine Permutation von $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ hervor (wegen des gemeinsamen Umfassungskörpers); also sind alle Konjugierten identisch.

III. In einem Normalkörper zerfällt jedes in K irreduzible $g(x)$, wenn es einen Linearfaktor $(x - \beta)$ hat, vollständig. Denn $g(x)$ ist durch das Produkt aller verschiedenen $(x - \beta)(x - \beta') \cdots$ teilbar, die durch die Gruppe entstehen, da $g(x)$ die Gruppe gestattet. Dieses Produkt liegt nach I in K, ist also – da $g(x)$ als irreduzibel in K vorausgesetzt war – mit $g(x)$ identisch.

IV. Ist für jedes irreduzible $g(x)$ diese Eigenschaft des vollständigen Zerfalls erfüllt, so wird L normal. Denn dann gilt das insbesondere für die Gleichung des primitiven Elements; also wird $L = K(z) = K(z, z', z'', ...)$, also nach II normal.

Ich freue mich daß Sie Takagi weiter in Ordnung bringen.[3] Ich merke immer mehr, wie sehr Ihr Bericht das Eindringen erleichtert; man muß nur mit dem Hilbertschen vergleichen; wieviel *heute* unnötige Anstrengung wird da verlangt![4]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 17.11.1926

[1] Hier geht es also noch einmal um die Darstellung der Galoistheorie in Band 2 der Hasseschen „Höheren Algebra“ [Has27c]. In der vorangegangenen, eine Woche zurückliegenden Postkarte vom 10. 11. 26 hatte Noether schon vermutet, dass man in der Galoistheorie den Satz von den symmetrischen Funktionen überhaupt nicht benötigt; sie war sich aber noch nicht sicher. Hier ist also die Bestätigung dafür, dass es geht. – Es ist nicht klar, welche Vorlesungen Emmy Noether meint, wenn sie sagt, dass sie darin ohne symmetrische Funktionen ausgekommen sei. Es gibt eine Liste der Vorlesungen, die Noether im Verlauf der Jahre in Göttingen gehalten hat. (Wir sind Frau Dr. Koreuber zu Dank verpflichtet, dass sie uns freundlicherweise die von ihr aufgestellte Liste zur Verfügung gestellt hat.) Danach gab es im Wintersemester 1923/24 eine als „Übungen“ bezeichnete Veranstaltung, in denen „Vorträge zur Körpertheorie“ gehalten wurden. Wahrscheinlich war es diese, denn im selben Semester, nämlich am 27. 11. 1923, hielt Emmy Noether zusammen mit R. Hölzer in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft einen Vortrag über „Galoissche Theorie

in beliebigen Körpern“. Eine Zusammenfassung dieses Vortrags findet sich im Jahresbericht der DMV, Band 33 (1924), S. 119 (kursiv). Demnach wurde über die Galoistheorie auf der Grundlage von Steinitz' abstrakter Köpertheorie vorgetragen, was damals durchaus neu war.

[2]Hasse hat diesen Aufbau der Galoistheorie *nicht vollständig* in sein Buch aufgenommen. Zwar hat er die Definition der normalen Erweiterung so gegeben, wie hier von Noether vorgeschlagen. (Heute wird allgemein die Terminologie „Galois-Erweiterung“ statt „normale Erweiterung“ benutzt.) Er hat jedoch die Noetherschen Folgerungen I-IV *vor* den Hauptsatz und damit *vor* den Fundamentalsatz der Galoisschen Theorie (in der Noetherschen Terminologie) gesetzt.

Einige Jahre später erschien das Buch [Ste30] mit einem Wiederabdruck der großen Arbeit von Steinitz [Ste10]. Das Buch wurde herausgegeben von Hasse und seinem Assistenten Reinhold Baer, und diese haben es mit Kommentaren und Zusätzen versehen. In dem vorliegenden Zusammenhang ist der *Anhang* von Bedeutung, in dem die Autoren eine Darstellung der Galoisschen Theorie geben, weil diese nämlich bei Steinitz nicht behandelt worden war. Der Aufbau der Galoisschen Theorie in diesem Anhang ist weitgehend konform mit dem, was Noether in dem vorliegenden Brief skizziert. An einer Stelle dieses Anhangs wird explizit gesagt, dass die Benutzung der symmetrischen Funktionen vermieden wird, obwohl Steinitz diese noch heranzieht. Obwohl das damals der „Trend“ war, insbesondere im Hinblick auf die Bücher von van der Waerden [vdW30] und von Haupt [Hau29], so ist doch der Einfluss von Emmy Noether nicht zu verkennen.

[3]Hasse arbeitete zu der damaligen Zeit an dem 2. Teil [Has30a] seines Klassenkörperberichts. Den 1. Teil [Has26a], in dem die Klassenkörpertheorie nach Takagi systematisch dargestellt wird, hatte Noether offenbar schon gelesen. Hierauf bezieht sich ihr Kommentar, wenn sie schreibt, dass er „das Eindringen erleichtert“. – Die Fertigstellung des 2. Teils zögerte sich dann bis 1930 hinaus, denn Hasse schrieb seinen Bericht völlig neu, nachdem 1927 Artin sein allgemeines Reziprozitätsgesetz bewiesen hatte.

[4]Offenbar war der Hilbertsche Stil des Zahlberichts [Hil97] aus der Sicht von Emmy Noether nicht abstrakt genug. Wenn aber Noether den Hilbertschen Zahlbericht mit dem Hasseschen Klassenkörperbericht vergleicht, so ist damit nicht gemeint, dass der Hassesche Bericht den Hilbertschen *ersetzen* sollte. Vielmehr hatte Hasse seinen Bericht als *Fortsetzung* des Hilbertschen konzipiert. In einem Brief Hilberts an Hasse vom 5. November 1926 drückt Hilbert seinen Wunsch aus, Hasse möge den Bericht so schreiben, dass ihn jeder, der mit den Kenntnissen des Hilbertschen Zahlberichts vertraut ist, „*verhältnismäßig leicht verstehen*“ könne. Das wird von Hasse im Vorwort seines Berichts dahingehend präzisiert, dass er die Kapitel I–VII des Hilbertschen Berichts als bekannt voraussetzt. – In späteren Jahren, so berichtet Olga Taussky [TT81], hat Noether sich allerdings ziemlich kritisch über den Hilbertschen Zahlbericht geäußert, und dabei hat sie Artin zitiert, demzufolge der Bericht die Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie um Jahrzehnte verzögert habe. Eine Begründung für die Kritik Artins ist uns nicht bekannt.

---

5 11.12.1926, Noether an Hasse

Göttingen, 11. 12. 26

Lieber Herr Hasse!

Von Ihren Resultaten scheint mir von allgemeinem Interesse, daß Sie jetzt ein einfaches Normenkriterium für absolute Klassenzahl eins im Zahlkörper haben; und ich meine Sie sollten das auch gleich in der Einleitung erwähnen.[1]

Im übrigen bin ich persönlich so stark idealtheoretisch eingestellt, daß ich glaube daß die eigentlich charakteristischen Eigenschaften der Integritätsbereiche sich durch Ideale und nicht durch Elementeneigenschaften aussprechen lassen; und daß Ihre Bedingungen zugleich Hauptidealeigenschaft ergeben, scheint dem recht

zu geben.[2] Insofern interessiert es mich, ob Hensel etwas wesentliches über den Polynombereich aussagen kann[3], wo ja die Polynome nur die algebraischen Gebilde höchster Dimension ergeben – während die übrigen, etwa Raumkurven, notwendig auf Ideale führen. (Sie brauchen sich übrigens Seite 10 bei dem Integritätsbereich mit eindeutiger Elementezerlegung als Koeffizientenbereich nicht auf *eine* Unbestimmte zu beschränken; obwohl mehrere Unbestimmte bei Auszeichnen *einer* dasselbe bedeuten, was Sie wohl mit der Beschränkung sagen wollten.) Wenn Sie vom Polynombereich zum Funktionalbereich übergehen[4] – also als Einheiten alle Quotienten von in u primitiven Funktionen adjungieren (§3, 4. in meiner Idealtheorie[5]) haben Sie wieder Tatbestand von Satz 2 [6]; und im übrigen endlichen Rang inbezug auf die Abelsche Gruppe dieser Einheiten. Dieser Rang wird Summe der Exponenten eines Basiselements; (z.B.:

1) Polynombereich von x und y, Koeffizienten aus Körper; modulo x^2 werden y und seine Potenzen, allgemeiner jedes nicht durch x teilbare Polynom Einheit; denn sei $g(x,y) \not\equiv 0 \pmod{x}$; dann wird $\frac{g(x,y)}{g(x,y)+ux^2} \equiv 1 \pmod{x^2}$; Nenner primitiv; also bilden $1, x$ ein modulo den Einheiten linear unabhängiges volles Restsystem.
2) Ganzzahliger Polynombereich in x, Hauptideal $2 \cdot 3^2$; der Restklassenring wird direkte Summe der Restklassenringe nach 2 und 3^2; mod 2 wird jedes Element Einheit, der Restklassenring Körper, also Rang *eins*. mod 3^2 gilt Rang 2 inbezug auf die Einheiten, d.h. inbezug auf den Restklassenkörper mod 3; u.s.w. allgemein.)

Damit ist der Polynombereich im wesentlichen eingeordnet; aber zugleich sehe ich, daß Ihre Funktion χ in jedem Fall konstruierbar:[7] wir brauchen nur zu setzen $\chi(\alpha) = 2^{\text{Summe der Exponenten}}$, wenn $\alpha = \pi_1^{e_1} \cdots \pi_k^{e_k}$, also $\chi(\alpha) = 2^{e_1+\ldots+e_k}$. Dann folgt (1) bis (4) bei Tatbestand von Satz 2; und bei Tatbestand von Satz 1 wenn Sie zum Funktionalbereich übergehen. (Natürlich außerdem definitionsweise $\chi(0) = 0$; $\chi(y) = 1$; was dem Exponenten Null aller Primelemente entspricht). Trotzdem ist natürlich das Normenkriterium für den Zahlkörper vernünftiger! Aber Ihre Note wird kürzer und allgemeiner werden. Der Übergang zum Funktionalbereich ist – zur Notwendigkeit des Kriteriums – natürlich dann und nur dann nötig, wenn der Doppelkettensatz nicht mod jedem $\mathfrak{m} \neq (0)$ erfüllt ist; (4) wird dann erst im Funktionalbereich erfüllt sein.

Satz 9) ist tatsächlich nicht ganz in Ordnung, wird jetzt ja wohl überhaupt geändert werden.[8] Ich habe in §3, 1.[9] die folgenden Voraussetzungen, die für Übertragung der Kettensätze hinreichend (und wohl auch im wesentlichen notwendig; sie werden wenigstens bei der eingehaltenen Beweisanordnung *alle* gebraucht): In $\mathfrak{J}$ sind die 5 Axiome erfüllt, also auch *ganze Abgeschlossenheit* (das ist bei Ihrer Fassung nicht vorausgesetzt, wohl aber, wenn Satz (1) oder (2) erfüllt ist); $\mathfrak{J}$ ist Ordnung; die Erweiterung ist *erster* Art; dann übertragen sich die Kettensätze; insbesondere besitzt $\overline{\mathfrak{J}}$ eine endliche Modulbasis inbezug auf $\mathfrak{J}$: $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; und damit überträgt sich der endliche Rang unter Beachtung von §3, 2. (Die Korrektur muß also schon *vor* dem Fragezeichen angebracht werden). Damit ist dann auch die Bemerkung über $\overline{\chi}(a) = \chi(N(a))$ richtig; und zwar geht der Beweis direkt,

wenn in $\mathfrak{J}$ Satz 2 gilt, weil dann die $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ linear unabhängig sind. Wenn nur Axiom I bis V erfüllt, muß man durch Übergang zu geeigneten Quotientenringen (Punktringen) die lineare Unabhängigkeit erzwingen; das hat Grell viel allgemeiner durchgeführt.

Sie schreiben „einfache“ Erweiterung; die könnte auch zweiter Art sein. Hier haben – unter Voraussetzung meiner Resultate – Artin und van der Waerden die Gültigkeit der Übertragung gezeigt, aber unter der einschränkenden Voraussetzung, daß der Wurzelring von $\mathfrak{J}$ endlich inbezug auf $\mathfrak{J}$ ist. Die Note ist eben als Separat der Göttinger Nachrichten erschienen, ich weiß nicht ob van der Waerden sie Ihnen schon geschickt hat – zusammen mit einer von mir gegebenen Anwendung auf Invarianten-Endlichkeit.[10]

Die Normensache muß hier aber noch genauer diskutiert werden (anstatt $\mathfrak{J}$ ganz-abgeschlossen vorauszusetzen, kann man auch verlangen, daß in dem aus $\mathfrak{J}$ abgeleiteten ganz-abgeschlossenen Bereich aller $\mathfrak{J}$-ganzen Elemente des Quotientenkörpers noch der Doppelkettensatz gilt; das ist aber fast dasselbe.)

Wenn man axiomatisch scharf in die Klassenkörpertheorie hineinsehen könnte, wäre das sehr schön! Wo sind die Sachen von F.K. Schmidt erschienen; er hat sie noch nicht hierhergeschickt![11]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Ich schicke die Arbeit uneingeschrieben zurück, damit sie nicht bis Montag hier liegen bleibt.

Es fragt sich, ob es nicht vernünftiger ist, (2) in: $\chi(\alpha\beta) = \chi(\alpha) + \chi(\beta)$ umzuwandeln und (1) entsprechend zu ändern; und dann die *Exponentensumme selbst* einzuführen. Diese ist, was wir Länge des Ideals nennen; nämlich Länge einer Kompositionsreihe vom Einheitsideal nach (α); wo eventuell zum Funktionalbereich überzugehen ist. Sie erweist sich besonders in den Grellschen Untersuchungen[12] als höchst wichtige Invariante (vgl. dazu §10[13]).

Anmerkungen zum Dokument vom 11.12.1926

[1] Offenbar hatte Hasse an Noether einen Manuskript-Entwurf zu seiner Arbeit „*Über eindeutige Zerlegung in Primelemente oder in Primhauptideale in Integritätsbereichen*“ [Has28] geschickt. (Vgl. dazu die Postkarte vom 19.1.1925.) Er hatte das Manuskript nicht deshalb geschickt, um es in den Mathematischen Annalen, für die Noether als (inoffizielle) Herausgeberin tätig war, zu publizieren, sondern er wollte ihre Meinung und ihren Rat einholen. (Die Arbeit erschien später im Crelleschen Journal.) In der Arbeit beweist Hasse das in Rede stehende notwendige und hinreichende Normkriterium für Klassenzahl 1 in einem algebraischen Zahlkörper K, nämlich: *Zu je zwei ganzen Zahlen $\alpha, \beta \neq 0$ aus K, für die β kein Teiler von α ist, gibt es ganze Zahlen ν, μ so daß*

$$0 < |N(\nu\alpha - \mu\beta)| < |N(\alpha)|,$$

wobei N die Normfunktion bedeutet. Wie von Noether vorgeschlagen, weist Hasse bereits in der Einleitung auf dieses Normkriterium für Klassenzahl 1 hin.

Heute ist dies Kriterium unter dem Namen „Dedekind-Hasse“ bekannt. Das Kriterium fand sich unveröffentlicht im Nachlass Dedekinds und wurde von Noether in die Gesammelten Werke von Dedekind aufgenommen (Band 2, Nr. 38) [Ded32]. In der Erläuterung dazu sagt Emmy Noether: „*Das hier gegebene Kriterium ist erst in neuester Zeit – im Rahmen allgemeinerer*

Untersuchungen – wiedergefunden worden.“ Und dann zitiert sie Hasses Abhandlung [Has28]. Wir können daraus schließen, dass Noether im Jahre 1926, als sie den vorliegenden Brief an Hasse schrieb, das Dedekindsche Manuskript noch nicht kannte, denn sonst hätte sie sicherlich ihren berühmten Ausspruch „das steht schon bei Dedekind“ auch Hasse gegenüber getan. Erst später, als sie zusammen mit Robert Fricke und Øystein Ore die Werke von Dedekind herausgab und dabei den Nachlass von Dedekind durchsah, bemerkte sie, dass das Hasse-Kriterium tatsächlich schon bei Dedekind stand.

Allgemeiner beweist Hasse: Ein Integritätsbereich I ist genau dann ein Hauptidealring, wenn es eine nichttriviale multiplikative Funktion $\chi : I \to \mathbb{N}$ gibt, die die obige Bedingung (für χ statt N) erfüllt.

[2]In seiner Arbeit [Has28] erwähnt Hasse ausdrücklich, dass er eigentlich nach einem Kriterium für Ringe mit eindeutiger Zerlegung in Primelemente gesucht habe, das nicht nur hinreichend sondern auch notwendig ist. Er habe aber ein solches noch nicht gefunden. Das von ihm gefundene Kriterium (vgl. Anmerkung 1) ist nämlich notwendig und hinreichend für die engere Klasse der Hauptidealringe, wie auch Noether sofort bemerkt.

[3]Hensel publizierte im Crelleschen Journal [Hen27] einen Beweis des folgenden Satzes: *Ist I ein Integritätsbereich mit eindeutiger Primelementzerlegung, so besitzt auch der Polynomring $I[x]$ eine eindeutige Primelementzerlegung.* Im Grunde konnte dieser Satz damals als wohlbekannt gelten, eine einfache Folge des sog. Gauß'schen Lemmas, aber er findet sich anscheinend in der früheren Literatur nicht in dieser Form, wo es sich um einen abstrakten Ring I handelt. Die Henselsche Beweismethode besteht darin, auf dem Polynomring $I[x]$ eine geeignete Funktion χ anzugeben, welche die o.g. Hassesche Bedingung erfüllt, jedoch nicht für beliebige α, β, sondern nur dann, wenn das Polynom α positiven Grad besitzt, zusammen mit einer Zusatzbedingung für den Fall, dass β ein primitives Polynom ist (dann soll ν relativ prim zu β sein).

Mithin sind die Ansätze von Hasse und Hensel ähnlich, übrigens auch in den Bezeichnungen. Zwar liegt das Datum der Henselschen Publikation *nach* dem Datum des vorliegenden Briefes, aber Hasse, der Hensel besonders nahe stand, kannte die Henselsche Methode. (In der Tat verweist Hensel auf die Hassesche Arbeit als einen „ersten Schritt“, um seine Methode weiter zu entwickeln.)

Erst später gelang es Krull [Kru31], die beiden Ansätze von Hensel und von Hasse zu vereinen. Er modifierte das Hassesche Axiom so, dass dadurch genau alle Integritätsbereiche mit Primelementzerlegung erfasst werden. (Vgl. Brief vom 2.11.1930.) Das im Sinne von Krull modifizierte Axiom fordert (mit den Bezeichnungen aus Anmerkung 1), dass $\nu\alpha - \mu\beta = q\gamma$ mit $\chi(\gamma) < \chi(\alpha)$, wobei q prim zu α sein soll, d.h. q ist kein Nullteiler modulo α.

[4]Der Begriff „Funktionalbereich“, wie ihn Noether definiert, war damals geläufig. Er bedeutet im vorliegenden Falle den Quotientenring des Polynomrings $R[u]$ mit den primitiven Polynomen als erlaubten Nennern, also denjenigen Polynomen, deren Koeffizienten den größten gemeinsamen Teiler 1 besitzen (unter der Voraussetzung, dass R eine eindeutige Primelementzerlegung besitzt). Dieser Funktionalbereich ist ein Hauptidealring. Solche Ringe firmieren heute unter dem Namen „Kronecker function rings“ und sind relativ gut untersucht. Vgl. etwa [FL05]. – Hasse sagt in der veröffentlichten Fassung [Has28] in einer Fußnote, dass er den Hinweis auf den Funktionalbereich einer „*brieflichen Mitteilung von Fräulein E. Noether*“ verdankt. Offenbar meint er den hier vorliegenden Brief von Noether.

[5]Gemeint ist die Arbeit „*Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern*“ [Noe26a] in den Mathematischen Annalen.

[6]Die Satznummern beziehen sich auf das Manuskript von Hasse.

[7]Zur Funktion χ siehe Anmerkung 1.

[8]Den „Satz 9“ gibt es in der Publikation [Has28] nicht, er scheint weggefallen zu sein. Aus der Noetherschen Diskussion scheint hervorzugehen, dass es sich bei dem „Satz 9“ um den Übergang zur ganzabgeschlossenen Hülle in einer endlichen, separablen Körpererweiterung gehandelt hatte.

[9]Hier bezieht sich Noether wieder auf ihre Arbeit [Noe26a].

[10]Vgl. [Noe26b] und [AvdW26].

[11]Zu dieser Zeit stand Hasse in Briefwechsel mit F. K. Schmidt, der auf Hasses Anregung hin begonnen hatte, die Klassenkörpertheorie der algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten mit endlichem Konstantenkörper zu entwickeln. Hasse hatte offenbar die Idee, die Klassenkörpertheorie axiomatisch zu begründen und damit sowohl den Zahlkörperfall als auch den Funktionenkörperfall gleichzeitig zu behandeln. Hierzu schreibt nun F. K. Schmidt in einem Brief vom 6.12.1926 an Hasse: „*Die von Ihnen erwähnte axiomatische Begründung der*

Klassenkörpertheorie hatte ich in dieser Allgemeinheit nicht geplant...". Und später in demselben Brief: „*Sehr schön wäre es natürlich, wenn man die Endlichkeitsvoraussetzungen so formulieren könnte, dass durch sie alle Körper charakterisiert würden, bei denen jeder relativ Abelsche Oberkörper als Klassenkörper aufgefasst werden kann; ähnlich wie nach Frl. Noether alle Körper mit gewöhnlicher Idealtheorie durch Teilerketten- und Vielfachen-Postulate gekennzeichnet sind...*". Es scheint so, dass Hasse in einem Brief an Noether über diesen Briefwechsel mit F. K. Schmidt berichtet hatte, und Noether das so verstanden hat, dass F. K. Schmidt bereits eine Axiomatik der Klassenkörpertheorie hätte, was aber nicht der Fall war. – Die Arbeit, nach der sich Noether erkundigt, hatte F. K. Schmidt im November 1926 in den Erlanger Berichten als eine erste vorläufige Ankündigung eingereicht [Sch28]. Vgl. dazu [Roq01]. – Zur Idee einer Axiomatisierung der Klassenkörpertheorie vgl. auch den nachfolgenden Brief vom 3. 1. 27.

[12] Wahrscheinlich bezieht sich Noether auf die Arbeit [Gre27b], die allerdings damals noch nicht erschienen war.

[13] §10 bezieht sich auf die Noethersche Arbeit [Noe26a]. Dort werden Kompositionsreihen behandelt.

---

6 03.01.1927, Noether an Hasse, Postkarte

Göttingen, 3. 1. 1927

Lieber Herr Hasse!

Ihre Ideen zur Klassenkörpertheorie interessieren mich sehr. Es geht in die Richtung, die ich mir immer im Anschluß an Dedekind-Weber (Crelle 92) gedacht hatte.

I. Formaler Teil,

II. Abstrakte Riemannsche Fläche.

Der formale Teil – der einen Integritätsbereich auszeichnet – wird dabei wesentlich idealtheoretisch; die Voraussetzungen sind meine fünf Axiome, aus denen man – durch Übergang zum Quotientenring – Ihr 6. Axiom der Hauptidealeigenschaft zusätzlich gewinnen kann. Hier sind die Voraussetzungen weiter als Sie annehmen; z.B. gilt ja meine hierher gehörige Diskriminantenarbeit für Funktionalbereiche, also algebraische Funktionen *beliebig* vieler Variablen. Durch die willkürliche Wahl des Integritätsbereiches erschöpft man aber noch nicht den ganzen Körper. Dagegen glaube ich, daß Sie beim II. Teil mit Ihrer Vermutung – Zahlkörper oder algebraische Funktionen *einer* Variablen – recht haben; hier müssen aber *alle* Integritätsbereiche herangezogen werden. Das Vorbild der Klasseneinteilung scheinen mir hier die Dedekind-Weberschen Polygonklassen (Divisorenklassen) zu sein, denen Ihre Bewertungsklassen entsprechen würden. Wenn Sie hierauf – statt auf Idealklassen – die Klassenkörpertheorie gründen könnten, wäre es sehr schön! Eine Endlichkeitsbedingung muß aber zukommen; denn bei Dedekind-Weber (Charakteristik Null) gibt es unendlich viele Polygonklassen.[1]

Da haben Sie noch ein paar ganz in der Luft schwebende Ausführungen mehr. Guten weiteren Erfolg für 1927![2]

Ihre Crelle-Jubiläumsarbeit scheint endlich einmal eine vernünftige Einführung in die komplexe Multiplikation zu geben![3]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 3.1.1927

[1]Offenbar hatte Hasse, im Anschluss an Noethers vorangegangenen Brief, nunmehr einige genauere Überlegungen mitgeteilt, wie er sich eine Axiomatisierung der Klassenkörpertheorie vorstellte. Die Einzelheiten dieser Überlegungen sind uns nicht bekannt. Interessant ist, dass er damals schon eine gleichzeitige Behandlung von Zahlkörpern und Funktionenkörpern einer Variablen ins Auge gefasst hatte, also (bei endlichem Konstantenkörper) die Theorie der heute so genannten *globalen Körper*. Und zwar denkt offenbar Hasse an eine Grundlegung der Klassenkörpertheorie auf *bewertungstheoretischer* Grundlage.

[2]So ganz in der Luft schwebten die Ausführungen von Emmy Noether nicht. Die Situation bei Dedekind-Weber kann abstrakt beschrieben werden als ein Körper, in dem eine Menge von Absolutbeträgen vorgegeben ist, also als ein multi-bewerteter Körper. Wenn Noether von einer „Endlichkeitsbedingung“ spricht, die hinzukommen müsse, dann lässt sich das so interpretieren, dass diese Absolutbeträge entweder diskret mit endlichem Restklassenkörper sein sollen, oder aber archimedisch. Nun hat Hasse bei seinem zahlentheoretischen Aufbau der Arithmetik stets mit besonderem Nachdruck auf die Rolle der *Produktformel* für Bewertungen hingewiesen. (Siehe z.Bsp. [Has26c].) Nimmt man diese Produktformel als Axiom dazu, dann handelt es sich nach Artin-Whaples [AW45] entweder um einen algebraischen Zahlkörper oder um einen Funktionenkörper einer Variablen mit endlichem Konstantenkörper, also um einen globalen Körper. In einem globalen Körper gilt nun bekanntlich die Klassenkörpertheorie.

Dies würde eine ziemlich indirekte Axiomatisierung der Klassenkörpertheorie ergeben, entspräche aber wahrscheinlich den Noetherschen Ideen, die sie in diesem Brief äußert. Der Nachteil ist, dass die *lokale* Klassenkörpertheorie dadurch nicht erfasst würde. Es ist jedoch zu beachten, dass die lokale Klassenkörpertheorie damals noch nicht bekannt war; diese wurde erst später durch Hasse [Has30c] entdeckt und spielt in späteren Briefen Noethers eine Rolle.

Artin-Tate [AT90] und auch Neukirch [Neu86] haben schließlich Axiome anderer Art für die Klassenkörpertheorie aufgestellt.

[3]Es handelt sich um Hasses Arbeit „*Neue Begründung der komplexen Multiplikation I. Einordnung in die allgemeine Klassenkörpertheorie*“ [Has27d], die 1926 im Jubiläumsband des Crelleschen Journals aus Anlaß seines 100-jährigen Bestehens erschienen war. Hierzu erschien später ein zweiter Teil [Has31b], in welchem die Komplexe Multiplikation ohne Benutzung der Klassenkörpertheorie entwickelt wurde.

Briefe 1927–1931

---

7 04.10.1927, Noether an Hasse, Postkarte

Göttingen, 4. 10. 27

Lieber Herr Hasse,

Können Sie mir sagen, ob aus den allgemeinen Existenzsätzen über abelsche Körper direkt dieser folgt: Es gibt zu jedem n mindestens einen (vermutlich beliebig viele) in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen zyklischen Körper des Grades 2^n, derart daß sein Unterkörper vom Grad 2^{n-1} reell ist[1], und daß (-1) in ihm als Summe von höchstens drei Quadraten darstellbar ist (Quadrate gebrochener Zahlen). Im Falle der Körper 4. Grades kann man das direkt aus der Parameterdarstellung ablesen (z.B. Weber, kl. Lehrb. §93 [2]); aber allgemein komme ich formal nicht durch.

Es handelt sich um ein Beispiel zur Darstellungstheorie durch Matrizen, nämlich die Frage, ob die Grade der kleinsten Körper, in denen eine irreduzible Darstellung möglich ist, beschränkt sind. Dabei nenne ich einen Körper einen kleinsten (in bezug auf die Darstellung), wenn diese in keinem seiner Unterkörper möglich ist.[3]

Im Fall der Quaternionenkörper ergeben nun alle Zahlkörper, in denen (-1) als Summe von höchstens drei Quadraten darstellbar ist, irreduzible Darstellungen durch Matrizen. Die obige Vermutung bedeutet also, daß der Grad der kleinsten Körper nicht beschränkt ist. R. Brauer äußerte (in Kissingen) die Vermutung der Nichtbeschränktheit. Seine Beispiele waren aber komplizierter als Quaternionenkörper. Es würde folgen, daß man über diese kleinsten Körper viel weniger weiß, als ich eine Zeitlang dachte.

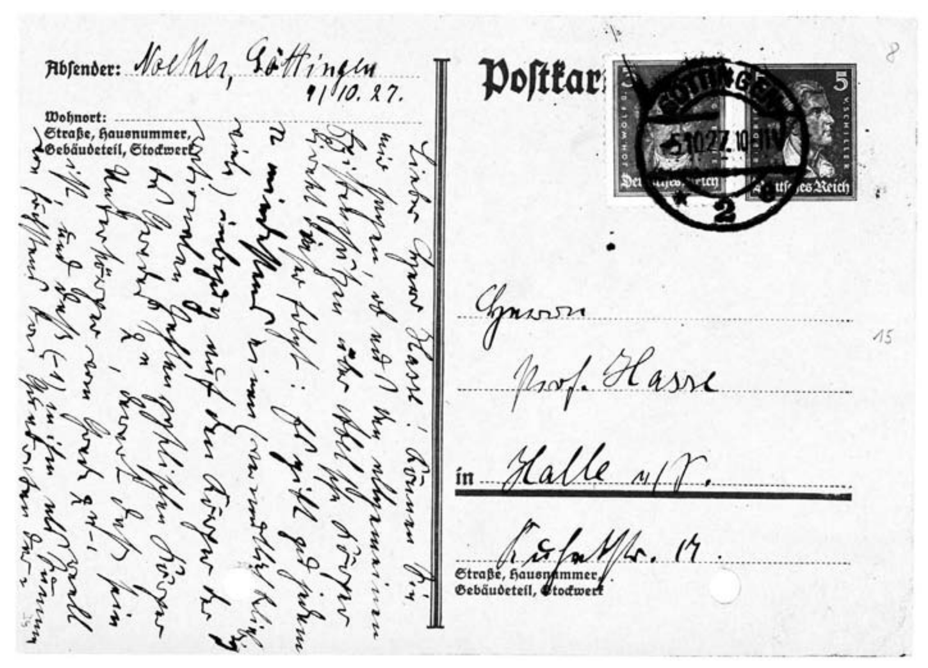
Mit besten Grüßen, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 4.10.1927

[1] Diese Realitätsbedingung ist von selbst erfüllt und hätte also weggelassen werden können. Dies ist ein Beispiel dafür, dass Noether ihre Postkarten sehr impulsiv verfasste und sofort abschickte, ohne noch einmal den Text zu kontrollieren (in derselben Weise wie heute oftmals e-mail Nachrichten versandt werden). Sonst hätte sie sicherlich bemerkt, dass die Realitätsbedingung überflüssig ist, wie sie es ja auch in ihrer nächsten Postkarte vom 19. 10. 1927 feststellt.

[2] Außer dem bekannten 3-bändigen „Lehrbuch der Algebra“ hatte Heinrich Weber 1912 noch ein „Kleines Lehrbuch der Algebra“ herausgegeben [Web12].

[3] Auf der DMV-Tagung 1925 in Danzig hatte Emmy Noether darauf hingewiesen, dass sich die Darstellungstheorie durch Matrizen in die Strukturtheorie der Algebren einordnen lässt [Noe26c]. Danach hat sie diesen Ansatz weiter entwickelt (u.a. in Vorlesungen), was später in der berühmten Arbeit [Noe29] gipfelte, die als „one of the pillars of modern linear algebra“ bezeichnet wurde (Curtis). Zum Zeitpunkt des vorliegenden Briefes war jedoch diese Arbeit noch nicht erschienen, und es ging Noether um die Klärung gewisser Details, insbesondere um die Eigenschaften der Zerfällungskörper. Sei A eine einfache zentrale Algebra über einem Körper K, vom Grad n^2. Ein Erweiterungskörper L von K heisst „Zerfällungskörper“ von A, wenn $A \otimes_K L$


Absender: Noether, Göttingen
4/10. 27.

Wohnort:
Straße, Hausnummer,
Gebäudeteil, Stockwerk

Postkarte

Herrn
Prof. Hasse
in Halle a/S.

Straße, Hausnummer,
Gebäudeteil, Stockwerk

Emmy Noether an Helmut Hasse, Göttingen 1927 Postkarte

eine volle Matrixalgebra über L ist. Das bedeutet, dass A eine irreduzible Matrizendarstellung über dem Körper L besitzt. In einem Brief an Richard Brauer vom 28. 3. 1927 hatte Noether die Prinzipien ihrer algebrentheoretischen Auffassung der Darstellungstheorie erläutert, dabei jedoch irrtümlich behauptet, dass jeder kleinste Zerfällungskörper einer zentralen Divisionsalgebra den Grad n besitzt. Brauer hatte das widerlegt, und auf der DMV-Tagung in Bad Kissingen im September 1927 hatte er ihr ein Gegenbeispiel gezeigt. Noether fragt nun, ob die *Grade* der kleinsten Zerfällungskörper wenigstens beschränkt sind. Auch dazu hatte ihr Brauer, wie aus ihrem Schreiben zu entnehmen ist, ein Gegenbeispiel geliefert. Noether war dies jedoch zu kompliziert und sie möchte nun herausfinden, ob es Gegenbeispiele schon für die gewöhnliche Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$ über $\mathbb{Q}$ gibt. Ein Erweiterungskörper L von $\mathbb{Q}$ ist genau dann ein Zerfällungskörper von $\mathbb{H}$, wenn es ein Element $\neq 0$ in $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{Q}} L$ gibt, dessen Norm verschwindet, d.h. es gibt in L eine Relation $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ mit nicht sämtlich verschwindenden Termen. Ist etwa $a \neq 0$, so ergibt sich nach Division mit a^2 eine Darstellung von -1 als Summe von drei Quadraten; das erklärt die Frage Noethers nach Körpern mit dieser Eigenschaft. – In Hasses Antwortbrief vom 6. 10. 1927 wird die Existenz solcher Körper bewiesen.

stellbar ist (Quadraten gebrochener Zahlen). Im
Fall der Körper 4. Grades kann man das direkt aus
der Parameterdarstellung ablesen (s. H. Weber, kl. Lehrb.,
§ 93); aber allgemein kann ich formal nicht durch.
Es handelt sich um ein Beispiel zur Darstellungstheorie (durch Matrizen), nämlich um die Frage ob
die Grade der kleinsten Körper, in denen eine
irreduzible Darstellung möglich ist, beschränkt
sind. Dabei nenne ich einen Körper einen kleinsten (inbezug auf die Darstellung), wenn diese in
keinem seiner echten Unterkörper möglich ist.
Im Fall der Quaternionenkörper ergeben
nun alle Zahlkörper, in denen (-1) als Summe
von höchstens drei Quadraten darstellbar ist,
irreduzible Darstellungen durch Matrizen.
Die obige Bemerkung bedeutet also, daß der
Grad der kleinsten Körper nicht beschränkt ist.
R. Brauer hat (in Tübingen) ausgesprochen die Vermutung der Nichtbeschränktheit; seine Beispiele waren aber komplizierter als Quaternionenkörper. Es würde
folgen, daß man über diese kleinsten Körper viel
weniger weiß, als ich eine Zeitlang dachte.
Mit besten Grüßen Ihre Emmy Noether.

Rückseite der Postkarte

8 06.10.1927, Hasse an Noether

Lösung der E. Noetherschen Halle, den 6. 10. 27

Frage auf Karte vom 4. X. 27

Liebe Fräulein Noether!

Ihre Vermutung ist richtig, wenn auch nicht *direkte* Folge aus meinen früheren Existenzsätzen. Ich beweise sie aber mit ganz ähnlichen Methoden:

I. Der zu konstruierende Körper vom Grade 2^n, zyklisch über dem rationalen Körper R, heiße k; sein reell geforderter Unterkörper vom Grade 2^{n-1} heiße k'. Ich konstruiere k als *den* Unterkörper 2^n-ten Grades eines Kreiskörpers k_p der p-ten Einheitswurzeln. Damit k selbst imaginär wird, wie es die weitere Forderung $-1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ in k notwendig bedingt, muß $p-1$ *genau* durch 2^n teilbar sein. Dann ist ersichtlich auch immer k imaginär und k' reell, letzteres weil k' im Unterkörper $\frac{p-1}{2}$-ten Grades k_p' von k_p enthalten ist. Es ist somit zuerst eine Primzahl p so zu bestimmen, daß

$$(1) \qquad p \equiv 1 \bmod 2^n, \quad p \not\equiv 1 \bmod 2^{n+1}$$

wird.

II. Aus meiner Arbeit Crelle 153, Satz 14 (Seite 128) folgt, daß die Gleichung $-1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ in k dann und nur dann lösbar ist, wenn Grad f oder Ordnung e der Primteiler $\mathfrak{l}$ von 2 in k gerade ist.[1]

Da bei der Konstruktion in I. die Ordnung $e = 1$ wird, weil 2 nicht in der Diskriminante von k_p, also nicht in der von k eingeht, ist also nur noch durch Wahl von p dafür zu sorgen, daß f gerade wird. Da k_p über k von ungeradem Relativgrad $\frac{p-1}{2^n}$ ist, ist der Grad f_p der Primteiler $\mathfrak{l}_p$ von 2 in k_p als ungerades Multiplum von f mit f gleichzeitig gerade oder ungerade. Somit kommt es nur darauf an, zu bewirken, daß f_p gerade wird. Dies f_p ist aber der kleinste Exponent, für den $2^{f_p} \equiv 1 \bmod p$ wird. Wie man durch Darstellung von $2 \bmod p$ durch eine primitive Wurzel mod p ohne weiteres einsieht, ist (zufolge (1)) f_p dann und nur dann gerade, wenn 2 kein 2^n-ter Potenzrest mod p ist. (Man kann auch direkter so schließen: k ist Klassenkörper zur Gruppe der 2^n-ten Potenzreste mod p über R, also $f > 1$, d.h. als Teiler von 2^n gerade, dann und nur dann, wenn 2 nicht in jener Gruppe liegt – Zerlegungsgesetz für den Klassenkörper). Neben (1) ist also auch die Forderung zu erfüllen:

$$(2) \qquad x^{2^n} - 2 \equiv 0 \bmod p \quad \text{unlösbar (in } R).$$

III. Es werde $p \equiv 1 \bmod 2^n$ aber nicht notwendig auch $p \equiv 1 \bmod 2^{n+1}$ vorausgesetzt. Dann ist (2) entweder unlösbar oder besitzt gleich 2^n inkongruente Lösungen. Tritt ersteres ein, so besitzt p in $R(\sqrt[2^n]{2})$ keinen Primfaktor 1. Grades; tritt letzteres ein, so besitzt p in $R(\sqrt[2^n]{2})$ genau 2^n verschiedene Primfaktoren 1. Grades – kurz: p wird in $R(\sqrt[2^n]{2})$ „voll-zerlegt". Das letztere ist wiederum gleichbedeutend damit, daß p im zugehörigen Galoisschen Körper $R(\zeta_{2^n}, \sqrt[2^n]{2})$, wo ζ_{2^n} eine primitive 2^n-te Einheitswurzel ist, voll-zerlegt wird. Die Bedingung (2) kann also auch so geschrieben werden:

(3) $$p \text{ wird in } R(\zeta_{2^n}, \sqrt[2^n]{2}) \text{ nicht voll-zerlegt,}$$

und zwar unter der Voraussetzung $p \equiv 1 \bmod 2^n$. Diese letztere Voraussetzung besagt nach der Kreiskörpertheorie, daß p im Kreiskörper $R(\zeta_{2^n})$ voll-zerlegt wird. Die Bedingung (1) fordert zusätzlich:

(4) $$p \text{ wird in } R(\zeta_{2^{n+1}}) = R(\zeta_{2^n}, \sqrt{\zeta_{2^n}}) \text{ nicht voll-zerlegt.}$$

Es kommt also darauf an, die Existenz solcher in $R(\zeta_{2^n})$ voll-zerlegter p nachzuweisen, die *weder* in $R(\zeta_{2^n}, \sqrt[2^n]{2})$, *noch* in $R(\zeta_{2^{n+1}})$ voll-zerlegt werden, d.h. die Existenz solcher Primideale 1. Grades $\mathfrak{p}$ aus $R(\zeta_{2^n})$, für die beides der Fall ist. Das kommt wieder darauf hinaus, zu zeigen, daß diejenigen $\mathfrak{p}$, die *entweder* in $R(\zeta_{2^n}, \sqrt[2^n]{2})$ *oder* in $R(\zeta_{2^{n+1}})$ voll-zerlegt werden, zusammen höchstens einen echten Bruchteil aller $\mathfrak{p}$ ausmachen. Es bezeichne nun r_n den Relativgrad von $\sqrt[2^n]{2}$ über $R(\zeta_{2^n})$, 2 ist der Relativgrad von $\sqrt{\zeta_{2^n}}$ über $R(\zeta_{2^n})$, und es bezeichne $\overline{r}_n$ den Relativgrad des Kompositums $(\sqrt[2^n]{2}, \sqrt{\zeta_{2^n}})$ über $R(\zeta_{2^n})$. Dann bilden:

die in $R(\zeta_{2^n}, \sqrt[2^n]{2})$ voll-zerlegten $\mathfrak{p}$ genau den Bruchteil $\frac{1}{r_n}$ aller $\mathfrak{p}$,

die in $R(\zeta_{2^n}, \sqrt{\zeta_{2^n}})$ voll-zerlegten $\mathfrak{p}$ genau den Bruchteil $\frac{1}{2}$ aller $\mathfrak{p}$,

die in $R(\zeta_{2^n}, \sqrt[2^n]{2})$ und $R(\zeta_{2^n}, \sqrt{\zeta_{2^n}})$ voll-zerlegten $\mathfrak{p}$ genau den Bruchteil $\frac{1}{\overline{r}_n}$ aller $\mathfrak{p}$,

und folglich die *entweder* ... *oder* ... voll-zerlegten $\mathfrak{p}$ genau den Bruchteil $\frac{1}{r_n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\overline{r}_n}$ aller $\mathfrak{p}$.[2]

Es ist also zu beweisen:

(5) $$\frac{1}{r_n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\overline{r}_n} < 1$$

IV. Der Relativgrad r_n ist nicht etwa 2^n, sondern

$$\begin{aligned} r_n &= 2^{n-1} \text{ für } n \geq 3, \\ r_n &= 2^n \quad \text{für } n = 1, 2. \end{aligned}$$

Für $n = 1, 2$ ist das klar, weil $\sqrt{2}$ weder zu $R(\zeta_2) = R(-1) = R$ noch zu $R(\zeta_{2^2}) = R(i)$ gehört. Für $n \geq 3$ gehört aber $\sqrt{2}$ zu $R(\zeta_{2^n})$, sodaß jedenfalls $r_n \leq 2^{n-1}$ ist. Dagegen gehört dann schon $\sqrt[2^2]{2}$ nicht zu $R(\zeta_{2^n})$. Wäre das nämlich der Fall, so

gehörte $\sqrt[2^2]{2}$ auch zum reellen Unterkörper (2^{n-2}-ten Grades) von $R(\zeta_{2^n})$, also (weil dieser auch Galoissch ist) auch der Quotient $i = \zeta_{2^2}$ zweier Konjugierten zu $\sqrt[2^2]{2}$, was unmöglich. Damit ist die Behauptung über r_n bewiesen. Die Gleichung (5) reduziert sich also auf

$$\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\overline{r}_n} \quad < \quad 1 \text{ für } n \geq 3,$$
$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\overline{r}_n} \quad < \quad 1 \text{ für } n = 1, 2.$$

Bis auf $n = 1$ ist das ersichtlich schon, ohne $\overline{r}_n$ zu benutzen, einzusehen. Für $n = 1$ ist $\overline{r}_n = 2^2$ als Relativgrad des Kompositums $(\sqrt[2^2]{2}, \sqrt{-1})$, was wieder die erforderliche Relation ergibt.

Entschuldigen Sie den Kopierstift.[3] Es geschieht, damit ich einen Durchschlag behalte. Legen Sie Wert auf Publikation? Dann können Sie vielleicht eine kleine Note mit Ihrer Anwendung auf irreduzible Darstellungen aus dem Vorstehenden zusammenstellen und an die Annalen[4] oder Gött[inger] Nachrichten geben.

Mit besten Grüßen

Ihr H. Hasse.

Anmerkungen zum Dokument vom 6.10.1927

[1]Hier zitiert Hasse diejenige Arbeit [Has23], in der er das *Lokal-Global-Prinzip* für quadratische Formen beweist, im vorliegenden Fall für die Darstellung von -1 durch die ternäre quadratische Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Die Darstellbarkeit von -1 durch diese Form in einem Körper K bedeutet, wie Noether geschrieben hatte, den Zerfall der Quaternionenalgebra über K. Mithin sehen wir hier zum ersten Mal explizit das Lokal-Global-Prinzip für eine Algebra, nämlich für die Quaternionenalgebra, ausgesprochen. Es dauerte mehr als 4 Jahre, bis sich herausstellte, dass dieses Lokal-Global-Prinzip in der Tat für *jede* einfache zentrale Algebra über einem Zahlkörper gilt. Vgl. Noethers Brief vom 10. 11. 1931.

[2]Da Hasse keine Referenz für den benutzten Dichtigkeitssatz für voll zerlegte Primideale gibt, so konnte er wohl annehmen, dass er Emmy Noether bekannt war. In der Tat handelt es sich um eine unmittelbare Folge „*der für die Klassenkörpertheorie grundlegenden analytischen Relationen*“, wie Hasse in seinem Klassenkörperbericht [Has30a] sagt (Teil II, Kap. V. §24); dabei meint er das Verhalten der L-Reihen im Punkt $s = 1$. – Heute sehen wir diesen Dichtigkeitssatz als Spezialfall des allgemeinen Dichtigkeitssatzes von Tschebotareff, der 1925 in den Mathematischen Annalen [Tsc26] erschienen ist. Allerdings würde für den vorliegenden Fall schon der schwächere Dichtigkeitssatz von Frobenius aus dem Jahre 1896 ausreichen [Fro96].

[3]Damals wurden Briefe mit der Hand geschrieben. Und zwar in der Regel mit Tinte und Federhalter (oder Füllfederhalter). Das eignete sich jedoch nicht dazu, einen Durchschlag (mit Kohlepapier) anzufertigen. Für diesen Zweck waren im Handel besondere „Kopierstifte“ erhältlich, mit denen man zur Herstellung eines Durchschlags kräftig aufdrücken konnte, die aber wie die Tintenschrift dokumentenecht waren. Weil also Hasse sich einen Durchschlag angefertigt hatte, ist dieser Brief erhalten geblieben.

[4]Hasse hat hier die „Mathematischen Annalen“ offenbar deshalb vorgeschlagen, weil er wusste, dass Emmy Noether dort als inoffizielle Herausgeberin tätig war. „Inoffiziell“ bedeutet, dass ihr Name nicht auf dem Titelblatt der Mathematischen Annalen genannt wurde. Wer allerdings

Lösung der E. Noetherschen Frage auf Karte vom 4. X. 27,

Halle, den 6. X. 27. 7/1

Liebe Fräulein Noether!

Ihre Vermutung ist richtig, wenn auch nicht direkte Folge aus meinen früheren Existenzsätzen. Ich beweise sie aber mit ganz ähnlichen Methoden:

I.) Der zu konstruierende Körper vom Grade 2^n, zyklisch über dem rationalen Körper R, heiße k; sein reell gedachter Unterkörper vom Grade 2^{n-1} heiße k'. Ich konstruiere k als den Unterkörper 2^n-ten Grades eines Kreiskörpers k_p der p-ten Einheitswurzeln. Damit k selbst imaginär wird, wie es die verlangte Darstellung $-1=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$ in k notwendig verlangt, muß $p-1$ genau durch 2^n teilbar sein. Dann ist ersichtlich auch immer k imaginär und k' reell, letzteres weil k' im Unterkörper $\frac{p-1}{2}$-ten Grades k_p' von k_p enthalten ist. Es ist somit zunächst eine Primzahl p so zu bestimmen, daß

(1.) $p \equiv 1 \bmod. 2^n$, $p \not\equiv 1 \bmod. 2^{n+1}$

wird.

II.) Aus meiner Arbeit Crelle 153, Satz 14 (Seite 128) folgt, daß die Gleichung $-1=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$ in k dann und nur dann lösbar ist, wenn Grad f oder Ordnung e der Primteiler $\mathfrak{l}$ von 2 in k gerade ist. Da bei der Konstruktion in I. die Ordnung $e=1$ wird, weil 2 nicht in der Diskriminante von k_p, also auch nicht in der von k aufgeht, ist also nur noch durch Wahl von p dafür zu sorgen, daß f gerade wird. Da k_p über k vom ungeraden Relativgrade $\frac{p-1}{2^n}$ ist, ist der Grad f_p

Helmut Hasse an Emmy Noether, Halle 1927

Bescheid wusste und eine Arbeit aus dem Interessengebiet von Emmy Noether in den Mathematischen Annalen publizieren wollte, der schickte das Manuskript direkt an sie nach Göttingen; und wenn Emmy Noether die Arbeit empfehlen konnte, dann schickte sie diese an Blumenthal, den geschäftsführenden Herausgeber. Als Eingangsdatum erschien in der publizierten Arbeit der Tag, an dem das Manuskript bei Emmy Noether eingetroffen war. – Zur Tätigkeit von Emmy Noether als inoffizielle Herausgeberin der Mathematischen Annalen sagte Hermann Weyl in seiner Gedächtnisrede bei der Totenfeier in Bryn Mawr [Wey35]: „*Emmy Noether was a zealous collaborator in the editing of the Mathematische Annalen. That this work was never explicitly recognized may have caused her some pain.*“ – Der Artikel von Hasse wurde jedoch nicht in den Mathematischen Annalen publiziert, sondern in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie. Siehe den nachfolgenden Brief vom 19.10.1927.

---

9 19.10.1927, Noether an Hasse, Postkarte

Göttingen, 19. 10. 27

Lieber Herr Hasse!

Ihr Beweis hat mir viel Freude gemacht; die Sache liegt also doch etwas tiefer! Ich dachte an eine Publikation in den Berliner Sitzungsberichten, wo sich bis jetzt so ziemlich alle kurzen Mitteilungen über Darstellungstheorie finden. Und zwar habe ich eine Note von 5-6 Seiten entworfen, die ich an R. Brauer – Königsberg schickte, damit er seinen Anteil einträgt; es sollte dann unter gemeinsamem Namen gehen, überhaupt etwas über neuere Ergebnisse berichten. Ihr Beweis könnte dann als kurze Note unmittelbar folgen; vielleicht mit dem Untertitel „aus einem Brief an E. Noether“, dann wäre textlich garnichts zu ändern! Was soll der Obertitel sein, und sind Sie überhaupt mit meinen Vorstellungen einverstanden? Soll man denn die Noten als ein Separat binden lassen oder als zwei? [1]

Ich muß nur noch Bescheid von R. Brauer abwarten. Es wäre ja möglich, obwohl nicht allzu wahrscheinlich, daß er die Tatsache der Nichtbeschränktheit der Grade der minimalen Zerfällungskörper allgemein bewiesen hätte.[2] Dann müßte erst gesehen werden, inwieweit das Beispiel noch Wert hat.

Übrigens würde ich in Ihrem Brief meine Vermutung nun so formulieren: Zyklische Körper des Grades 2^n über R, wo -1 Summe von drei Quadraten. Daß der Unterkörper des Grades 2^{n-1} reell, ist ja keine neue Forderung; das hatte ich neulich übersehen. Ich schicke Ihnen dann vielleicht das ganze zu, ehe es an Schur geht.[3]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 19.10.1927

[1]Die beiden Noten wurden als ein Separat zusammen gebunden.

[2]Für minimale Zerfällungskörper der Quaternionen konnte Brauer die Nichtbeschränktheit der Grade auch direkt nachweisen, zwar nach den Ideen von Hasse aber ohne Benutzung der Klassenkörpertheorie. In einer Fußnote zu [BN27] heißt es darüberhinaus, Brauer habe nachträglich zeigen können, dass es minimale Zerfällungskörper *zu jedem geraden Grad* gibt, also zu allen für einen Zerfällungskörper der Quaternionen möglichen Graden. Übrigens lässt sich letzteres inzwischen für alle zentralen einfachen Algebren über Zahlkörpern beweisen, mit Hilfe des Lokal-Global Prinzips für Algebren und den in [BHN32] entwickelten Methoden.

[3]Issai Schur, Berlin, war Mitglied der Preussischen Akademie der Wissenschaften und konnte daher der Akademie Arbeiten zur Publikation in den Sitzungsberichten vorlegen.

---

10 26.10.1927, Noether an Hasse, Postkarte

Göttingen, 26. 10. 27

Lieber Herr Hasse!

Für Ihr Manuskript besten Dank; es ist jetzt tatsächlich übersichtlicher geworden.[1] Wollen Sie nicht noch anmerken, daß unter Einbeziehung Ihres Satzes 13 folgt, daß sich (-1) immer auch als Summe von *zwei* Quadraten darstellen läßt sobald es sich als Summe von *drei* darstellen läßt.[2] Das wollte ich neulich schon schreiben, vergaß es aber und komme jetzt darauf, weil R. Brauer mein Quaternionenkriterium mit seinen Methoden nachrechnete und dabei auf die Darstellbarkeit von (-1) als Summe von *zwei* Quadraten kam. Übrigens gilt das für beliebige totalimaginäre Körper, die auch Parameter enthalten können (oder von Charakteristik p und unvollkommen sein können)![3] (Es folgt, daß im Primkörper $\mathfrak{P}_p$ sich (-1) immer als Summe von zwei Quadraten darstellen läßt. Ist das bekannt ?[4]) Es muß also auch Darstellbarkeitskriterien als Summe von Quadraten geben![5] – Ich kann den Satz ja einfügen; wollen Sie mir Ihre Fassung angeben und ob in Text oder Bemerkung?[6] – Brauer konnte elementar beweisen, daß es unendlich viele n gibt, die den Bedingungen genügen: es existiert zu ihnen ein p, sodaß

$$(1) \qquad \begin{cases} p \equiv 1 \pmod{2^n}; \quad p \not\equiv 1 \pmod{2^{n+1}}; \\ 2^r \equiv -1 \pmod{p} \quad \text{für mindestens ein } r \end{cases}$$

Er nimmt t beliebig ganz und positiv; p als Primteiler von $2^{2^t}+1$; also $2^{2^{t+1}} \equiv 1 \pmod{p}$; n sei die größte Zahl, so daß 2^n in $p-1$ aufgeht; dann wird $n > t$ und (1) erfüllt! Folglich gibt es unendlich viele solche n. – Es ist natürlich viel weniger als Ihr Existenzsatz, und Ihr Darstellbarkeitskriterium steckt drin. Allerdings kann er auch verifizieren, daß aus (1) das Quaternionen-Zerfällungs-Kriterium folgt für die entsprechenden Körper.

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Es wird wohl noch 14 Tage dauern, bis ich die Sachen zu Schur schicke wegen der Korrespondenz mit Brauer. Wollen Sie es vorher sehen, oder genügt Ihnen Korrektur?

Anmerkungen zum Dokument vom 26.10.1927

1 Offenbar hatte Hasse zur Publikation eine überarbeitete Fassung seines Manuskripts aus dem Brief vom 6. 10. 1927 geliefert.

2 Gemeint ist der Satz 13 aus der Hasseschen Arbeit [Has23] im Crelleschen Journal. In dem vorangegangenen Brief hatte Hasse sich auf Satz 14 aus dieser Arbeit bezogen. Satz 14 gibt ein Kriterium für die Darstellbarkeit einer beliebigen Zahl $\mu \neq 0$ eines Zahlkörpers K als Summe von 3 Quadraten des Körpers. Satz 13 gibt ein Kriterium für den Fall $\mu = 0$, also für die Darstellbarkeit von -1 als Summe von 2 Quadraten. Wie Noether bemerkt, folgt aus dem Kriterium von Satz 14 für $\mu = -1$, dass auch das Kriterium von Satz 13 erfüllt ist. Beide Kriterien beziehen sich auf das Verhalten der Stellen 2 und ∞ im Körper K.

3 In der Publikation [BN27] wird als Begründung dafür auf die Identität

$$(c^2 + d^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 + (c^2 + d^2)^2$$

verwiesen. Dort wird gesagt, dass diese sich aus der Normenproduktformel für Quaternionen herleite; vgl. dazu Noethers Äusserung auf der nächsten Postkarte vom 1.11.1927, dass sie „*so etwas nur auf dem Weg über Quaternionenkörper oder ähnlichem finden*“ könne. Es gibt eine Postkarte von Noether an Richard Brauer vom 2.11.1927, auf der sie die obige Formel explizit ausrechnet als Folge der Normenproduktformel der Quaternionen. Dazu schreibt sie: „*Hier hat die Sache viel Spaß gemacht!*“ – Übrigens findet sich die obige Identität (nebst zwei weiteren Identitäten, die dasselbe leisten) schon im Nachlass von Gauß [Gau00].

4 Ja, das war bekannt. (Der Satz wurde wohl zuerst von Lagrange im Zusammenhang mit dem 4-Quadrate-Satz bewiesen.) Hasse hat in seiner Antwort an Noether darauf hingewiesen; vgl. Noethers Reaktion in ihrer nächsten Postkarte vom 1.11.1927.

5 Hier spricht Noether ein allgemeines Problem der Algebra an, das über den vorliegenden Zusammenhang hinausgeht. Vielleicht hat Noether über diese Frage einmal mit van der Waerden gesprochen. Denn dieser setzte im Jahre 1932 in den DMV-Jahresbericht (Band 42) folgende Aufgabe:

Wenn in einem Körper die Zahl -1 Summe von 3 Quadraten ist, so auch von 2 Quadraten; wenn von 5, 6 oder 7, so auch von 4; wenn von 15 oder weniger, so auch von 8.

Im folgenden Band 43 des Jahresberichts findet sich dazu eine Reihe von Lösungen. Eine dieser Lösungen war von Richard Brauer eingesandt worden. Er bemerkt dazu, dass der erste Teil der Aufgabe bereits in der Arbeit [BN27] behandelt sei, und dass kurz darauf die Lösung auch für die anderen Teile der Aufgabe entstand. Die Lösung der gesamten van der Waerdenschen Aufgabe war demnach im Kreis um Emmy Noether bekannt. Es ist schwer vorstellbar, dass van der Waerden darüber nicht informiert war, denn auch er gehörte ja zum Kreis um Emmy Noether und kannte ihre Arbeiten. Eine mögliche Erklärung für seine Aufgabenstellung ist, dass er feststellen wollte, ob die Lösung dieser Frage schon anderweitig bekannt sei. (Das war damals nicht selten die Motivation für eine Aufgabenstellung im Jahresbericht.) Vielleicht wollte er, angeregt durch die Fragestellung von Emmy Noether, gleichzeitig auf das allgemeine Problem aufmerksam machen, das sich zwangsläufig aus seiner Fragestellung ergibt, nämlich für einen beliebigen Körper K die Frage nach der Minimalanzahl von Quadraten in K, durch die sich -1 darstellen lässt. Heute bezeichnet man diese Minimalanzahl als die *Stufe* des Körpers. Die Aufgabe von van der Waerden legt die Frage nahe, ob die Stufe eines Körpers stets eine Potenz von 2 ist. Das damit entstandene Problem konnte erst viel später von Pfister in [Pfi65] gelöst werden. Einige Jahre danach hat dann Witt die Pfistersche Theorie auf eine neue und sehr einfache Art behandelt, mit Hilfe des von ihm eingeführten Begriffs der „runden“ quadratischen Form. Die Wittsche Theorie ist in den Lecture Notes [Lor70] von Lorenz dargestellt.

Wir sehen, dass diese Entwicklung angestoßen wurde durch die Noethersche Überzeugung, die sie in diesem Brief ausspricht: „*Es muß also auch Darstellbarkeitskriterien als Summe von Quadraten geben!*“

[6] Das war nun nicht mehr nötig. In der publizierten Fassung [Has27b] spricht Hasse nur von der Darstellung von -1 als Summe von *zwei* Quadraten und bezieht sich nur auf Satz 13, nicht mehr auf Satz 14.

---

11 01.11.1927, Noether an Hasse, Postkarte

Göttingen, 1. 11. 27

Lieber Herr Hasse!

Herzlichen Glückwunsch zum Töchterlein, dem Sonntagskind! Gibt es eigentlich schon ein Brüderchen?

Daß die Lösbarkeit von $-1 = x^2 + y^2$ in $\mathfrak{P}_\mathfrak{p}$ trivial ist, hatte ich schon bald selbst bemerkt; ich kann aber so etwas nur auf dem Weg über Quaternionenkörper oder ähnlichem finden! [1]

Der Brauersche Ansatz reicht für die beabsichtigte Anwendung – Nichtbeschränktheit der Gradzahlen – aus [2]; Ihr Resultat gibt aber darüber hinaus viel genauere Einsicht und ist vor allem wertvoll, weil man so wenig über die Zerfällungskörper der nichtkommutativen Körper weiß. Was wir an allgemeinen Einbettungssätzen haben, kommt ohne Beweis in die Note.

Ich glaube, daß man auch im Falle der höheren Transzendenten[3] schon soviel Idealtheorie hat, um Ihre Darstellungstheorie durch quadratische Formen anfassen zu können. Denn – wie schon Kronecker im wesentlichen gezeigt hat – gilt ja für die Ideale höchster Dimension die klassische Theorie. Sie finden das am einfachsten auseinandergesetzt in meiner 5-Axiome-Arbeit, Ann[alen] 96, wo ich in §3, 4, diese Theorie einordne. Daß man Arithmetik im üblichen Sinn hat, sehen Sie an meiner Diskriminanten-Arbeit[4], wo der Funktionalbereich ebenfalls mit umfaßt ist; auch an der dort zitierten Arbeit von Ostrowski, Gött[inger] Nachr[ichten] – Ostrowski macht die Theorie der Differente u.s.w. im Anschluß an die Kroneckerschen Definitionen.[5] Es sollte mich sehr freuen, wenn Ihre Theorie sich mit diesen Mitteln schon behandeln ließe; ich glaube auch nicht, daß man die viel kompliziertere Theorie der Ideale niederer Dimension zu Ihren Sachen braucht. Vermöge des Funktionalbereichs werden die Variablen – bis auf eine – im wesentlichen in die Einheiten hineingezogen; es muß also ungefähr wie bei $\mathfrak{P}_p(x)$ sein.[6]

Mit besten Grüßen, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 1.11.1927

[1]Offenbar hatte Hasse in seiner Antwort auf Noethers Frage im vorangegangenen Brief geschrieben, dass die Darstellbarkeit von -1 als Summe von zwei Quadraten in einem endlichen Körper in der Tat wohlbekannt sei. Noether bezieht sich hier auf den Satz von Wedderburn, dass jede einfache Algebra über einem endlichen Körper zerfällt, insbesondere also auch die Quaternionenalgebra über dem Primkörper $\mathfrak{P}_{\mathfrak{p}}$ mit p Elementen.

[2]In der gemeinsamen Note [BN27] konstruiert Brauer mit Hilfe eines elementaren Lemmas aus der Zahlentheorie minimale Zerfällungskörper für die Quaternionen, er benötigt also nicht das Hassesche Lokal-Global-Prinzip für ternäre quadratische Formen.

[3]Hiermit meint Noether Funktionenkörper von mehreren Variablen über einem Grundkörper.

[4]Gemeint ist die Arbeit [Noe27] im Crelleschen Journal; vgl. dazu auch den Brief vom 3. 11. 1926.

[5]Vgl. [Ost19].

[6]Anscheinend glaubt Noether, dass das Hassesche Lokal-Global-Prinzip für quadratische Formen auch in Funktionenkörpern mehrerer Variablen gültig sein könne, wobei sie keine Spezifikation des Konstantenkörpers gibt; dieser sollte wohl entweder ein Zahlkörper oder ein endlicher Körper sein dürfen. Heute wissen wir, dass das in dieser Form nicht der Fall ist. Bei Funktionenkörpern einer Variablen über einem endlichen Körper – Prototyp ist der von Noether erwähnte rationale Funktionenkörper $\mathfrak{P}_p(x)$ über dem Primkörper mit p Elementen – bleibt das Lokal-Global-Prinzip für quadratische Formen jedoch gültig. Dies wurde wohl zuerst verifiziert in der Dissertation des Hasse-Schülers Rauter 1926 in Halle. Noether scheint die Rautersche Dissertation, die niemals publiziert wurde, nicht zu kennen. Später äußert sie sich kritisch über eine weitere Arbeit Rauters, [Rau28b], die im Crelleschen Journal erschienen war; vgl. Brief vom 14. 5. 1928.

---

12 26.12.1927, Noether an Hasse, Postkarte

Göttingen, 26. 12. 27

Lieber Herr Hasse!

Ich schicke Ihnen gleichzeitig ein Korrektur-Exemplar unserer Note, das ich zurück erbitte, da ich vermute, daß Sie auch gleichzeitig Korrektur erhalten haben. Das für die Druckerei bestimmte Exemplar geht über R. Brauer an I. Schur, sodaß ich etwaige Wünsche auch direkt an Schur schreiben kann. Sie werden jetzt auch schon sehen können, ob Ihnen Zusammenbinden oder gemeinsames Verschicken lieber ist.[1] Für die Separata macht Zusammenbinden keine Schwierigkeiten, wie Schur mir schrieb. Ich schlug Brauer 150-200 Separata vor, damit außer den gemeinsamen noch jeder für sich hat; ich dachte an 30-40 Stück für mich, für Göttingen und für Privatverteilung.

Für welche Zahl sind Sie? Und würden Sie und Brauer die Versendung übernehmen? Ich kenne meine Lässigkeit (die Diskriminanten-Arbeit liegt noch halb hier) und Ihre Ordnung in diesem Punkt. Bei der zweiten Korrektur könnte ja der Druckerei Bescheid über die Verteilung der Separata gegeben werden. Falls nur gemeinsam veröffentlicht wird, wären Sie wohl S. 6 genauer zu zitieren, wie ist der genaue Titel? [2]

Es wird Sie interessieren, daß ich jetzt auch zur Verzweigungstheorie der Diskriminanten-Arbeit entsprechende Ansätze habe. Ich will selbst nur die Hauptordnung in einer Note in den Annalen behandeln[3] und Grell, der sich schon

mit den Fragen beschäftigt hatte, die Einzelausführung für beliebige Ordnungen übergeben. Meine Definition der Differente kommt für $f'(x)$ – wenn $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\gamma)$ – heraus auf: $f'(x) =$ Spur von $f(x) : (x-\alpha)$. Anstelle von $f(x)$ treten allgemein die Relationen zwischen den ω.[4]

Beste Neujahr- und Weihnachtswünsche! Was macht das Töchterchen?

Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 26.12.1927

[1] Die Separata der beiden Arbeiten [BN27] und [Has27b] wurden tatsächlich zusammengebunden und in dieser Form ausgeliefert.

[2] Der Titel der Arbeit [Has27b] lautet: „Existenz gewisser algebraischer Zahlkörper“. Der Titel von [BN27] lautet: „Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen“.

[3] Diese Annalen-Arbeit ist nicht mehr erschienen. Möglicherweise haben die hier erwähnten Ansätze schliesslich Eingang in jenes Manuskript zur Differententheorie gefunden, das Noether bei ihrer Emigration an Grell zur Aufbewahrung gegeben hat, und das dann posthum im Crelleschen Journal veröffentlicht wurde: [Noe50].

[4] In der posthum publizierten Crelle-Arbeit [Noe50] wird mit $\omega_1, \dots, \omega_n$ eine Ganzheitsbasis in einem algebraischen Zahlkörper bezeichnet. Diese ω sind hier gemeint. Die Relationen zwischen den ω bilden ein Ideal im ganzzahligen Polynomring von n Unbestimmten.

---

13 06.01.1928, Noether an Hasse, Postkarte

Göttingen, 06. 01. 28

Lieber Herr Hasse!

Ich bin mit Ihrem Versendungsvorschlag sehr einverstanden und werde Brauer Nachricht geben. Er wollte 200 Separata bestellen, damit reichen wir gut alle zusammen. Wegen des Zusammenheftens müssen Sie aber Schur noch Nachricht geben, auch wegen des Versendens an die einzelnen Orte. Meine „Privatverteilung“ ist wesentlich, was Sie Sicherheitsfaktor nennen, außerdem Verteilung an einige gute Hörer.

Dann liegt mir daran, daß einiges nach Amerika geht, wo viel nichtkommutativ gearbeitet wird. Ich dachte an:

1. University of Princeton (New Jersey), Department of Mathematics; Lefschetz, Veblen, Wedderburn, Alexandroff, H. Hopf (letztere als Rockefellermenschen dort);

2. Chicago, Dickson

3. Vandiver in Univ. Texas, Austin

4. Wahlin, Univ. Missoury Columbia (Diese als Berichterstatter.)

5. Olive Hazlett, Univ. Urbana, Illinois

6. MacDuffee, Univ. Columbus, Ohio

Wollen Sie diese mit übernehmen, dann würden mir inkl[usive] der Göttinger 45 Separata genügen, andernfalls bitte ich um 55. (Järnik, Prag und Suetuna, Tokyo sind zur Zeit hier). Skolem, Oslo, ist doch wohl auf Ihrer Liste ? Ebenso J. v. Neumann, Berlin.

Für Ihre Korrekturbemerkungen besten Dank; ich habe die Präzisierungen eingetragen und an Schur geschickt. Die Trivialität des [ ]-Satzes[1] wurde durch ein „offenbar" hervorgehoben; ich habe den Satz nur hingeschrieben, weil Schur immer diese Fassung mit den konjugierten Darstellungen hat. Zu Ihrer Korrektur habe ich keine Bemerkungen; die Schursche „Elementarisierung" scheint mehr ein „Veraltmodischen" zu sein![2]

Ich hoffe, mit der Zeit noch weiter an die höhere Arithmetik heranzukommen; besonders mit Darstellungstheorie; es geht aber langsam.[3]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 6.1.1928

[1]Die offenen Klammern [ ] stehen im Original bei Noether. Wahrscheinlich handelt es sich um eine Textstelle in dem Korrekturbogen, und Noether konnte annehmen, dass Hasse wusste, worum es sich handelt.

[2]Schur hatte Hasse mitgeteilt, dass er den in Rede stehenden Existenzsatz auch ohne Idealtheorie beweisen könne, mit Hilfe der Ergänzungssätze zum quadratischen und biquadratischen Reziprozitätsgesetz. Am Schluss seiner Arbeit [Has27b] reproduziert Hasse den Schurschen Beweis und vergleicht diesen mit seinem eigenen Beweis.

[3]Es ist nicht klar, was Noether hier mit „höherer Arithmetik" meint. Vielleicht meint Noether die Idealtheorie der maximalen Ordnungen einer einfachen Algebra? Oder sie meint die Klassenkörpertheorie? Oder sie meint den Zusammenhang zwischen beiden?

---

14 02.05.1928, Noether an Hasse, Postkarte

Göttingen, 2. 5. 28

Lieber Herr Hasse!

Ich habe auch keine Separata-Rechnung erhalten; es scheint daß die Reichsdruckerei jedem von uns dreien 50 Freiexemplare zugebilligt hat!

Ich habe noch 8 Separata übrig, möchte sie aber gern in Reserve behalten. Es scheint mir nicht schwer, 5-10 Leute von der Liste zu streichen; da doch manche algebraisch und arithmetisch nicht Interessierte darauf standen (z.B. habe ich zu Maier-Frankfurt gar keine Beziehung; wie mir aber einfällt, Sie wohl doch durch Jahresbericht-Aufgaben).

Ich will Ihnen gleich meine Liste mitteilen: Noether, Bernays, Bernstein, Cohn-Vossen, Courant, Grandjot, Herglotz, Hilbert, Landau, Lewy, Neugebauer, van der Waerden, Walther, Grell, Jarnik, Scorza, Wedderburn, Alexandroff, Hopf, Stepanoff, O. Schmidt (Moskau), Châtelet, Tschebotarow, Weber, A. Weil. Die letzten beiden sind Studenten; A. Weil (aus Paris) war mit Rockefellerstipendium hier[1]. Châtelet ist der einzige Franzose, der sich ernstlich mit diesen Fragen, auch zahlentheoretischen, beschäftigt; er hat jetzt ein Buch über Automorphismen abelscher Gruppen geschrieben, wo sehr viel hyperkomplex gearbeitet wird. An diesen und Tschebotarow, der sich vor ein paar Tagen nach meinen Sachen über Gruppencharaktere bei mir erkundigte, muß ich aber noch schicken. O. Schmidt (direktes Produkt) hat ein russisches Buch über Gruppentheorie und Darstellung geschrieben; er war voriges Jahr hier, ebenso Stepanov; hat an Krull anschließend gearbeitet.[2] Die Amerikaner habe ich stark reduziert; an Dickson werde ich aber wohl noch schicken. Dies meine etwas bunte Liste! Suetuna kommt auch noch darauf, der jetzt hier ist.[3] Ich bin erst Sonntag zurückgekommen, sodaß Sie mich garnicht angetroffen hätten.

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 2.5.1928

[1] André Weil berichtet über seine Göttinger Eindrücke, auch über Emmy Noether, in seinem Buch [Wei93].

[2] Gemeint ist hier nicht die Person „Krull“, sondern der Satz von Krull über direkte Produkte, der heute oft „Satz von Krull-Schmidt“ genannt wird. Der dabei genannte „Schmidt“ ist der Russe Otto Schmidt, der auch in der Liste erscheint.

[3] Diese Namensliste, zusammen mit der Liste auf der vorangegangenen Postkarte, erscheint deshalb interessant, weil sie einen Hinweis liefert, mit wem Emmy Noether in wissenschaftlichem Kontakt stand.

15 14.05.1928, Noether an Hasse

Reichsdruckerei Berlin SW 68 Oranienstr. 91[1]

14. Mai 1928

```
22 Stück Mehrabdruck der beiden Mitteilungen
     aus Stück XXXII der Sitzungsberichte
     der Preußischen Akademie der Wissen-
     schaften: Über minimale Zerfällungs-
     körper irreduzibler Darstellungen und
     Existenz gewisser algebraischer Zahl-
     körper, zu 7/8 Bg. 8°, in bedrucktem
     Umschlag geheftet und beschnitten.                        3.30
```

Lieber Herr Hasse!

Nach obiger Rechnung erkennen Sie, daß wir zusammen 100 Sep. à 15 Pf = 15 M zu bezahlen haben; ich schicke Ihnen hiermit meinen Anteil von 5 M mit der Bitte, *diese Rechnung mit Ihrer gemeinsam* zu bezahlen.

Ich habe mir die Arbeit von Rauter[2] im letzten Crelle-Heft etwas angesehen; er hat vergessen zu sagen, daß er K als *Erweiterung erster Art* von k voraussetzt, obwohl es mehrfach benutzt wird, wesentlich bei nicht ausgeführten Schlüssen.[3]

Die Idealtheorie bleibt übrigens auch bei Erweiterung 2. Art erhalten, wie F.K. Schmidt und in allgemeinen Fällen Artin-van der Waerden (Erhaltung der Kettensätze – in den Göttinger Nachrichten 1926) gezeigt haben [4]; dagegen werden die Differenten- und Diskriminantensätze hier anders.

Daß alles genau wie im Zahlkörper geht, beruht auf dem folgenden, auch im Zahlkörper allein benutzten Voraussetzungen:

1) K ist Erweiterung erster Art von k;

2) die ganzen Größen aus k bilden Hauptidealring;

3) der Restklassenring nach jedem ganzen Ideal aus k (und damit aus K) besteht aus endlich vielen Elementen.

1) und 2) gibt Idealtheorie, 3) [?][5] gibt Verzweigungstheorie; insbesondere muß die Theorie von Trägheits- und Verzweigungsgruppen übereinstimmen[6], da es sich hier um eine Theorie derselben Restklassenringe[7] handelt, während die betreffenden Unterkörper von K durch die Galoissche Theorie gegeben sind.

Die wirklichen Unterschiede treten also *nur* im verschiedenen Verhalten der unendlich fernen Punkte auf.

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 14.5.1928

[1]Es handelt sich um die Rechnung der Druckerei für Sonderdrucke der beiden Arbeiten [BN27] und [Has27b], die zusammengebunden geliefert wurden. Noether schickt Hasse die Rechnung und schreibt auf das Papier samt Rückseite noch andere, mathematische Informationen.

[2]Herbert Rauter war Gymnasiallehrer in Tilsit (Ostpreußen) und war 1926 bei Hasse in Halle promoviert. In seiner Dissertation hatte er die Resultate der Hasseschen Dissertation auf den Fall eines rationalen Funktionenkörpers $\mathbb{F}_p(x)$ übertragen – nämlich das Lokal-Global-Prinzip für quadratische Formen. Die jetzt in Rede stehende Crelle-Arbeit [Rau28b] entwickelte u.a. die Grundlagen der Arithmetik in algebraischen Funktionenkörpern über endlichen Körpern, sowie die Hilbertsche Verzweigungstheorie für Galoissche Erweiterungen von Funktionenkörpern.

[3]„Erweiterung erster Art“ heißt „separable Erweiterung“. Die Noethersche Kritik führte zu einer Korrektur, die noch im selben Crelle-Band [Rau28a] erschien, und in welcher Rauter feststellte, dass er in der Tat Separabilität hätte voraussetzen müssen.

[4]F. K. Schmidt hatte Funktionenkörper einer Variablen behandelt, und zwar in seiner Arbeit [Sch31a] zur „Analytischen Zahlentheorie in Charakteristik p“; diese Arbeit erschien zwar erst 1931, aber sie war schon 1927 fertig und als Habilitationsschrift benutzt worden; offensichtlich kannte Noether diese Arbeit. Artin und van der Waerden behandelten Erweiterungen solcher Körper der Charakteristik p, bei denen der Grad über dem Teilkörper K^p endlich ist, was bei Funktionenkörpern in einer oder mehreren Variablen der Fall ist, wenn der Grundkörper diese Eigenschaft besitzt. Vgl. [AvdW26]. Später publizierte Grell [Gre35] den Satz ganz ohne zusätzliche Voraussetzung.

[5]Hier steht im Original ein Wort, das wir nicht entziffern konnten.

[6]Gemeint ist offenbar, dass die Theorie der Trägheits- und Verzweigungsgruppen in Funktionenkörpern übereinstimmt mit der entsprechenden Theorie in Zahlkörpern.

[7]Das ist in Bezug auf wilde Verzweigung nicht richtig, denn die Restklassenringe in Funktionenkörpern (Charakteristik p) sind nicht dieselben wie die Restklassenringe in Zahlkörpern.

---

16 12.08.1929, Noether an Hasse, Postkarte

12. 8. 29 [1]

Lieber Herr Hasse!

Damit kein Mißverständnis entsteht: Grell hat sich die Übertragung des Differentensatzes aufs Nichtkommutative *unabhängig* überlegt.[2] Ich hatte ihm damals nur den kommutativen Beweis angegeben, da ich nicht wußte daß er sich nichtkommutativ interessierte. An van der Waerden schrieb ich gleich von der Möglichkeit der Übertragung. Übrigens interessierte mich dabei immer die „reduzierte“ Differente (vgl. §24, 25 der Korrektur): $\mathfrak{d}_{red}^{-1}$ besteht aus allen μ, sodaß $\mathrm{Sp}_{red}(\mu\mathfrak{o})$ ganz.[3] Man muß da noch Zusatzbetrachtungen über reduzierte Spuren anstellen, die ich – mit noch nicht richtigem Beweis – damals an Artin schrieb. Jetzt in der Vorlesung[4]

über nichtkommutative Arithmetik habe ich alles richtig vorgetragen: $\mathfrak{d}_{red}$ ist durch alle und *nur* die Primideale teilbar, die mindestens quadr[atisch] in p aufgehen. Die nichtred[uzierte] Differente, wo statt des Exponenten die einseitige Länge eingeht, ist aber auch von Interesse: die soll Grell publizieren, da er die Einzelheiten genauer durchgeführt hat. Daß bei Grell an neutraler Stelle der kommutative Differentenbeweis publiziert wird, finden Sie doch auch richtig: es ist ja zu amüsant, daß sich drei Menschen diesen Beweis überlegt haben. Sie scheinen zeitlich der erste gewesen zu sein (Artin und ich Februar).[5]

Die schöne Artinsche Idealtheorie[6] habe ich auch nicht-kommutativ vorgetragen; daß es geht hatte ich durch Artin u. van der Waerden gehört. Es wird viel einfacher als Krullscher Beweis.

Nun noch eine Frage! Wissen Sie nicht eine Assistentenstelle für einen außerordentlich tüchtigen und sympathischen Menschen, der aber palästinensischer Staatsangehörigkeit ist; seit 1922 in Deutschland und *nichts* von unangenehm jüdisch. Levitzki hat summa mit einer ringtheoretischen Begründung der Frobeniusschen „Beziehungen zwischen Charakteren von Gruppen und Untergruppen" promoviert; weit über Frobenius hinausgehend gezeigt daß die Relationen *charakteristisch* sind für die Unterringsklasse. Jetzt hat er Galoissche Theorie vollständig reduzierter Ringe gemacht.[7]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 12.8.1929

[1]Seit dem letzten Brief vom 14. 5. 1928 sind 15 Monate vergangen. Dazu bemerken wir, dass sich Noether im Winter 1928/29 als Gastprofessor in Moskau aufgehalten hatte, auf Einladung von Alexandroff, den sie aus Göttingen kannte. Noether traf erst Ende Mai 1929 wieder in Göttingen ein. (Sie schreibt dies auf einer Postkarte aus Moskau an Richard Brauer, datiert 19. 5. 1929).

[2]Einen Monat später, auf der DMV-Tagung im September 1929 in Prag trug Grell u.a. über den Differentensatz im Nichtkommutativen vor. Vgl. [Gre30b]. Nach der Noetherschen Formulierung im vorliegenden Brief sieht es so aus, als ob irgendwie der Verdacht entstanden war, dass Grell seinen Beweis von Emmy Noether bekommen hatte; dem widerspricht Noether hier entschieden, aber sie gibt zu, dass sie sich dann die Sache auch selbst überlegt hat und dies an van der Waerden geschrieben hat. Vielleicht hatte Hasse durch van der Waerden davon Kenntnis erlangt. – Grell war einer der ersten Schüler Noethers in Göttingen. Zum Zeitpunkt dieses Briefes war er mit einem Lehrauftrag in Jena. Hasse hatte an der Arbeit Grells zur allgemeinen Verzweigungstheorie offenbar regen Anteil genommen. In einer Postkarte vom 29. 11. 1929 an Hasse schreibt Grell: „*Meine Verzweigung in allgemeinen Ordnungen hat unter dem Einfluß Ihrer Kritik noch zuletzt eine solche Form genommen, die eine Verbesserung meinerseits mir aussichtslos erscheinen läßt...*" 1930 hat sich Grell in Jena habilitiert und Hasse war einer der Gutachter. Die Habilitationsschrift von Grell wurde offenbar nicht publiziert; erst später (1936 in der Mathematischen Zeitschrift) erschien seine Arbeit [Gre36] zur Verzweigungstheorie der Ordnungen, jedoch nur im kommutativen Fall.

[3]Mit „Korrektur" sind offenbar die Korrekturbogen zur Noetherschen Arbeit „Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie" [Noe29] gemeint, die in der Mathematischen Zeitschrift erschien. Es handelt sich dabei um die von van der Waerden angefertigte Ausarbeitung der Noetherschen Vorlesung vom Wintersemester 1927/28. Die §24 und 25 dieser Arbeit enthalten die Theorie der reduzierten Spur und der reduzierten Diskriminante. Dort allerdings werden nur Diskriminanten von Algebren (hyperkomplexe Systeme) behandelt und es geht nur um das Verschwinden oder Nichtverschwinden der Diskriminante, wodurch die Existenz oder Nichtexistenz des Radikals angezeigt wird. Auf der vorliegenden Postkarte geht es nun um die Diskriminanten und die

Differenten von *Ordnungen* in Algebren. – Vgl. dazu Noethers Brief vom 3. 11. 1926 und die Postkarte vom 26. 12. 1927 für den kommutativen Fall.

[4]Im Sommersemester 1929 las Emmy Noether „Nichtkommutative Arithmetik", Sonnabends 11-1 Uhr.

[5]In Artin's Arbeit „Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen" [Art28a] werden Differente und und Diskriminante einer Ordnung definiert und untersucht. Artin erwähnt in der Einleitung jedoch, dass in seiner Diskriminante noch ausserwesentliche Teiler stecken, und er sagt: „*Ich hoffe, bei anderer Gelegenheit auf eine zweckmäßigere Definition der Diskriminante zurückzukommen.*" Artin hat später niemals mehr etwas dazu publiziert, es könnte aber sein, dass er sich im Februar 1929 eine solche zweckmäßigere Definition überlegt hatte, möglicherweise mit Hilfe der *reduzierten* Spur, und dass sich Noether darauf bezieht. – Hasse hat in seiner Arbeit „Über $\wp$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme" [Has31d] ebenfalls die Differente und Diskriminante von Maximalordnungen betrachtet; er führt dies auf den lokalen Fall zurück und kann demgemäß genau den Exponenten bestimmen, mit dem ein Primideal in der Differente aufgeht. Vielleicht hatte Hasse schon jetzt, also 1929, diese Resultate erhalten und sie Emmy Noether mitgeteilt ? Noether selbst hat offenbar die Diskriminantensätze im Nichtkommutativen nicht publiziert; wie aus diesem Brief hervorgeht, wollte sie das ihrem Schüler Grell überlassen. In dem Deuringschen Bericht über Algebren [Deu35a] wird bei der Diskussion von Differenten und Diskriminanten von Maximalordnungen (Kap. VI, §5-6) nur die Arbeit von Noether [Noe27] zitiert, wo allerdings nur der kommutative Fall behandelt wird. Wahrscheinlich war es Deuring bekannt, dass Noether inzwischen den Satz auch im nichtkommutativen Fall erhalten hatte, aber er konnte dafür kein Zitat angeben. (Oder er wollte es nicht, um Grell nicht die Möglichkeit zur Publikation zu nehmen.) Außerdem wird bei Deuring auch die oben erwähnte Arbeit von Hasse [Has31d] zitiert.

[6]Gemeint ist Artins Fassung der van der Waerdenschen Idealtheorie beliebiger ganzabgeschlossener Integritätsbereiche; diese ist unter dem Namen „Quasigleichheit von Idealen" in den 2. Band des Lehrbuches „Moderne Algebra" [vdW31] eingegangen. M.W. wurde bisher in der Literatur keine Verallgemeinerung der Artinschen Theorie ins Nichtkommutative gegeben; wir wissen nur aus dieser Postkarte von Emmy Noether, „dass es geht". – Der von Noether erwähnte „Krullsche Beweis" ist uns nicht bekannt.

[7]Die Dissertation Levitzki erschien in [Lev31b] mit Voranzeige in [Lev29]. Zur Galoistheorie halbeinfacher Ringe siehe [Lev31a].

---

17 02.10.1929, Noether an Hasse

Göttingen, 2. 10. 29 Lieber Herr Hasse!

Da ich bei meiner Rückkehr[1] erst Dedekind-Korrekturen[2] erledigen mußte, komme ich erst heute zur Beantwortung Ihrer Karte. Vorerst – was ich über den Zusammenhang von hyperkomplexer Algebra und Klassenkörpertheorie[3] weiß, ist sehr bescheiden und ganz formal; eigentlich nichts weiter als eine Deutung der Hilbertschen symbolischen Potenzierung, wofür ich allgemein den Gruppenring als Operatorenbereich setze. Zur Erläuterung will ich erst ein paar Tatsachen über den Gruppenring zusammenstellen, die sich zum Teil in der Zeitschriftarbeit finden (die § beziehen sich darauf).[4]

1. Sind $a_1, \ldots, a_h$ die Elemente einer endlichen Gruppe, so bezeichne ich mit $\mathfrak{o}$ den zugehörigen *ganzzahligen* Gruppenring, also alle ganzrationalzahligen Verbindungen der als linear unabhängig zu betrachtenden a, mit den Gruppen-Multiplikationsregeln.

Mit $\mathfrak{S}$ bezeichne ich das zugehörige hyperkomplexe System in bezug auf den Körper der *rationalen* Zahlen, also alle rationalzahligen linearen Verbindungen der a. Es wird also $\mathfrak{o}$ Ordnung in $\mathfrak{S}$ (nicht notwendig maximal, wie das Quaternionenbeispielzeigt; maximal bei zyklischen Gruppen von Primzahlgrad wird $\mathfrak{o}e_1 + \mathfrak{o}e_2$ (vgl.2.)). $\mathfrak{S}$ wird ein Ring ohne Radikal, also vollständig reduzibel (§26), $\mathfrak{S}$ soll der rationale Gruppenring heißen. (In der Arbeit steht für *diesen* die Bezeichnung $\mathfrak{o}$.)

2. Die irreduziblen Darstellungen der Gruppen und des rationalen Gruppenrings sind die gleichen (§20, Schluß); man erhält also alle durch direkte Summenzerlegung. Um die absolut irreduziblen zu erhalten, muß der Koeffizientenbereich von $\mathfrak{S}$ algebraisch erweitert werden; man kann aber auch so vorgehen, daß man erst $\mathfrak{S}$ zerlegt, und dann erst in den Komponenten die Koeffizienten-Erweiterung vornimmt. Bei der Zerlegung von $\mathfrak{S}$ selbst spaltet sich die der identischen Darstellung entsprechende zweiseitige Komponente vom Rang eins ab; und auf diese direkte Summenzerlegung: $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}e_1 + \mathfrak{S}e_2$, $e_1 + e_2 = 1$ (wo $a_1 = 1$ gesetzt ist) und die Orthogonalitätsrelationen: $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$; $e_1^2 = e_1$; $e_2^2 = e_2$; kommt es einstweilen überhaupt nur an. e_1 und e_2 liegen dabei im Zentrum von $\mathfrak{S}$.

3. Vermittelt $\mathfrak{S}e_1$ die identische Darstellung, so ist e_1 gegeben durch $e_1 = \frac{a_1+\ldots+a_h}{h}$ (Bemerkung von Levitzki), und daraus wird sich der Zusammenhang mit der Norm ergeben. Denn es kommt: $a_i \cdot e_1 = e_1 \cdot a_i = e_1$[5], und folglich $e_1^2 = e_1$. Es gibt aber nur *ein* Idempotent, das die identische Abbildung vermittelt.

Die zweite Komponente $\mathfrak{S}e_2$ wird gleich dem Differenzenideal

$$\mathfrak{P} = \big((a_2 - 1), \ldots, (a_h - 1)\big)$$

(a_1 gleich 1, also $a_1 - 1 = 0$). Das folgt aus meinen allgemeinen Überlegungen über Differenzenideale, läßt sich aber natürlich auch direkt verifizieren, etwa so: Wegen der vollst[ändigen] Red[uzibilität] ist $\mathfrak{P}$ direkter zweiseitiger Summand, der zweite Summand also zu $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ ring-isomorph, und außerdem eindeutig bestimmt; also gleich $\mathfrak{S}e_1$, da hier alle Bedingungen erfüllt sind.

4. Geht man von $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{o}$ über, so zeigt sich, daß beide Komponenten, $\mathfrak{S}e_1$ und $\mathfrak{S}e_2$, Erweiterungsideale von Idealen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$ sind; denn beide besitzen Idealbasen aus $\mathfrak{o}$ (etwa $N = he_1$ und $M = he_2$, die ja in $\mathfrak{S}$ an Stelle von e_1 und e_2 treten können). ~~Daraus~~[6] folgt aber, daß die ursprünglichen Ideale $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{o}$ Verengungsideale von $\mathfrak{S}e_1$ bezw. $\mathfrak{S}e_2$, d.h. jeweils Durchschnitt von $\mathfrak{S}e_1$ bzw. $\mathfrak{S}e_2$ mit $\mathfrak{o}$ sind (durch genauere Basisbetrachtung, und zwar $((a_2 - 1), \ldots, (a_h - 1))$ in $\mathfrak{p}$ und N in $\mathfrak{n}$). Also kommt in $\mathfrak{o}$: $\mathfrak{n} = N\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p} = M\mathfrak{o}$. Dabei wird $\mathfrak{p}$ auch gleich dem Differenzenideal $((a_2 - 1), \ldots, (a_h - 1))$ in $\mathfrak{o}$. Das Differenzenideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{o}$ wird also Hauptideal, mit der Basis $M = he_2$; ebenso wird der „Differenzenquotient" (vergl. 5.) $\mathfrak{n}$ Hauptideal mit der Basis $N = he_1$ (h ist dabei die entsprechende Differente $(N)_{a_i \to 1}$). Sie sehen, daß es sich um die ersten Überlegungen meines Prager Vortrags[7] handelt, nur nichtkommutativ gefaßt.[8]

5. Sucht man in $\mathfrak{S}$ die Gesamtheit der Elemente, die durch e_1 annulliert werden, so kommt $\mathfrak{P} = \mathfrak{S}e_2$; wegen $s = se_1 + se_2$ für jedes s aus $\mathfrak{S}$ und der Orthogonalität: $e_1e_2 = 0$; e_i im Zentrum. Entsprechend besteht $\mathfrak{S}e_1$ aus der Gesamtheit der durch e_2 annullierten ($\mathfrak{S}e_1 = \mathfrak{S} : \mathfrak{P}$).

Dagegen kann man in $\mathfrak{o}$ nur schließen: wird ein Element t durch N annulliert, so kommt: ht in $\mathfrak{p}$; und alle Elemente aus $\mathfrak{p}$ werden durch N annulliert wegen $MN = 0$ und $ht = Mt + Nt$. Dazu ist folgendes zu bemerken: die letzten ganz in $\mathfrak{o}$ verlaufenden Überlegungen bleiben bestehen, wenn man in $\mathfrak{o}$ von den ganzzahligen Koeffizienten zu den Restklassen nach irgend einer ganzen Zahl übergeht, wie es in den Anwendungen tatsächlich der Fall ist. (Will man das nicht, so folgt aus dem Annullieren durch N, bzw. M das durch e_1, bzw. e_2; daher in 4. die Bezeichnung Differenzenquotient). Mit einem Analogon zu $h = M + N$ arbeiten Sie S. 271, 7.) in Ia)[9]; für die zyklische Gruppe hat $\mathfrak{p}$ ja auch die Basis $(\sigma - 1)$: der Gruppenring $\mathfrak{o}$ wird der Restklassenring nach $\sigma^{\ell} - 1$; bzw. $\sigma^{\ell^n} - 1$.

Die Anwendung auf die Klassenkörpertheorie denke ich mir nun so:

6. Es sei K Galoisscher Körper über k, und $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{o}$ die zur Galoisschen Gruppe von K/k gehörigen Gruppenringe. Es bedeute ferner $\mathfrak{J}$ irgend eine Strahlklassengruppe in K, erklärt nach einem Idealmodul $\mathfrak{m}$ aus k (oder allgemeiner nach einem invarianten Modul in K); also die Voraussetzungen von Ia, §19, nur daß K nicht Abelsch zu sein braucht. $\mathfrak{J}$ besitzt $\mathfrak{o}$ als Multiplikatorenbereich, wenn man der Bequemlichkeit halber $\mathfrak{J}$ additiv schreibt (sonst als Exponentenbereich); wobei die Erklärungen die üblichen sind: sind $A_1, \ldots, A_t$ (das h habe ich leider, wie ich sehe, schon verbraucht) die Elemente von $\mathfrak{J}$, also die Strahlidealklassen in K, so bedeutet a_iA die Anwendung der Substitution a_i auf A; und $(a_i + a_j)A$ bedeutet die Summe (oder genauer das Produkt) $a_iA + a_jA$. Der Strahl A_1 selbst geht also bei der addit. Schreibweise in die Null über. In $\mathfrak{J}$ ist ferner die Untergruppe $\mathfrak{R}$ der *rationalen* Strahlklassen enthalten, d.h. derjenigen, in denen Ideale aus k liegen; zu $\mathfrak{R}$ gehört der Strahl (die Null).

Nun läßt sich die Norm aller Klassen A, kurz die Norm von $\mathfrak{J}$, definieren als Multiplikation (bzw. Potenzierung) mit $N = a_1 + a_2 + \ldots + a_h$, d.h. die Norm von $\mathfrak{J}$ bedeutet die Multiplikation (bzw. Potenzierung) mit dem der identischen Darstellung entsprechenden Ideal des ganzzahligen Gruppenrings $\mathfrak{o}$. Wegen $t\mathfrak{J} = 0$ (die t-te Potenz jeder Klasse wird die Einheit von $\mathfrak{J}$) ist dabei der absolute Multiplikatorenring (§1) – der Ring $\mathfrak{o}$ mit Koeffizienten modulo t oder ein Restklassenring von diesem.

7. Da nach 5. gilt: $MN = 0$, wo M Basis des Differenzenideals $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{o}$, so folgt sofort: die Norm von $\mathfrak{p}\mathfrak{J}$ – d.h. $\mathfrak{J}$ hoch dem Differenzenideal – verschwindet, liegt im Strahl. Umgekehrt kann man aber nur schliessen: Ist $NA = 0$, so liegt hA in $\mathfrak{p}\mathfrak{J}$; wegen $hA = MA + NA$; $NA = 0$; MA in $\mathfrak{p}A$ in $\mathfrak{p}\mathfrak{J}$; d.h. die h-te Potenz jeder Klasse des Hauptzahlstrahls liegt in $\mathfrak{J}$ hoch Differenzenideal (man kann sich also auf den direkten Faktor von $\mathfrak{J}$ beschränken, dessen Ordnungen zu h nicht prim sind). Daß man allgemein auch nicht mehr schließen kann, zeigen ja schon die Sätze über Einheitenhauptgeschlecht (Ia, §12, Satz 12).[10]

Es entsteht nun die Frage: gilt *allgemein* ein *Hauptgeschlechtssatz* derart, daß es zu jedem passend gewählten $\mathfrak{m}$ einen invarianten Teiler $\mathfrak{M}$ gibt, sodaß in der aus $\mathfrak{J}$ durch Komplexion nach $\mathfrak{M}$ enstandenen Klassengruppe $\mathfrak{C}$ gilt: aus $NA = 0$ (in $\mathfrak{C}$) folgt A in $\mathfrak{p}\mathfrak{C}$? Und hier, wo das Formale aufhört und das Arithmetische anfängt, weiß ich nichts mehr. Mir scheint aber, daß gerade hier Ihre neuen Untersuchungen eingreifen, die ja auch teilweise für beliebige K gelten, um zuerst einmal im

Abelschen Fall und dann vielleicht allgemein etwas mehr als bisher zu verstehen. In den obigen formalen Sachen kann ja $\mathfrak{J}$ irgend eine Abelsche Gruppe sein, die $\mathfrak{o}$ gestattet, der Zusammenhang mit Idealklassen ist überhaupt noch nicht da.[11]

8. Ein paar Bemerkungen über mögliche weitere Ansätze habe ich noch, die aber einstweilen noch reine Phantasie sind. Da im Abelschen Fall die Einheit der Klassengruppe in k, zu der K gehört, also die Idealgruppe H, durch Normbildung entsteht, entspricht sie also der identischen Darstellung von $\mathfrak{o}$ (Multiplikation mit N). Nun ergeben die übrigen Darstellungen, die durch direkte Summenzerlegung von $\mathfrak{P} = \mathfrak{S}e_2$ (bezw. $\mathfrak{p}$) nach Koeffizientenerweiterung entstehen, gerade die Charaktere; und die Gruppe der Charaktere (Gruppe der Zusammensetzung der Darstellungen) ist der ursprünglichen von K/k isomorph; sollten nicht die Zuordnungen zur Klassengruppe in K sich auch von hier aus führen lassen (neben der Artinschen Zuordnung oder auch als andere Deutung dieser) und im Zusammenhang mit Ihrem §8, I bringen lassen?[12] Diese Zusammensetzung der Darstellungen existiert ja auch im Nichtkommutativen, und führt auf einen kommutativen Ring (Speiser, 1. Auflage: §45).[13]

Und weiter halte ich es nicht für ausgeschlossen, daß bei einem stärker arithmetischen Aufbau meine Prager Differentensätze hineinspielen: ich kann im Anschluß daran die Differente als ähnlich dem Führer einer Ordnung (im Dedekind Sinn) deuten, im erweiterten hyperkomplexen System der Hauptordnung. Die Summe der Komponenten, wo also $\mathfrak{d}$ im Nenner ist, wird erst maximal.

Nun machen Sie mit diesen Phantasien, was Sie wollen:

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 2.10.1929

[1] Gemeint ist die Rückkehr von der DMV-Tagung in Prag, die vom 16. bis 23. September 1929 stattfand. Auf dieser Tagung hatte Noether einen Vortrag mit dem Titel „Idealdifferentiationen und Differente" gehalten. Die in Aussicht gestellte ausführliche Publikation hat sie jedoch nicht mehr fertigstellen können. Der bereits fertige Teil erschien posthum in [Noe50]. Hasse hatte auf der Prager Tagung einen allgemeinen Vortrag gehalten, der unter dem Titel „Die moderne algebraische Methode" publiziert wurde [Has30b].

[2] Emmy Noether gab zusammen mit Robert Fricke und Øystein Ore die kommentierten Gesammelten Mathematischen Werke von Dedekind [Ded32] heraus.

[3] Anscheinend hatte Hasse auf seiner Postkarte gefragt, was Noether über den Zusammenhang zwischen hyperkomplexer Algebra (also Algebrentheorie) und Klassenkörpertheorie wisse. Wie sich aus diesem Brief ergibt und wie auch Noether selbst bemerkt, war das in der Tat noch sehr bescheiden.

Es entsteht die Frage, wie denn Hasse dazu kam, Noether gerade jetzt diese Frage zu stellen. Nach Ausweis des Datums hatte Hasse seine Postkarte kurz nach der Prager DMV-Tagung geschrieben, wo er sich ja mit Noether getroffen hatte. Es ist demnach wahrscheinlich, dass Noether in einem Gespräch mit Hasse einige Ideen über Algebrentheorie im Zusammenhang mit Klassenkörpertheorie geäußert hatte, und dass Hasse nunmehr um weitere Details gebeten hatte. Dabei sind die folgenden Dinge in Betracht zu ziehen:

Erstens hatte Hasse schon im März 1929 (also 7 Monate vor diesem Brief) seine Arbeit [Has30c] dem Crelleschen Journal eingereicht, worin er seine Normenresttheorie als „Klassenkörpertheorie im Kleinen" deutet, wo er also die Entdeckung der lokalen Klassenkörpertheorie bekanntgibt. Mit ziemlicher Sicherheit war Noether darüber informiert, obwohl diese Arbeit zum

Zeitpunkt des in Rede stehenden Briefes noch nicht erschienen war. Es erscheint plausibel, dass Hasse in Prag darüber mit Noether gesprochen hat.

Zweitens hatte Hasse im Sommersemester 1929 (in dem Noether teilweise noch in Moskau war) ein Seminar über Algebrentheorie abgehalten. Wir wissen das aus einem (undatierten) Brief von Hasse an Kurt Hensel vom Sommersemester 1929, in dem er folgendes schrieb:

> *Den wissenschaftlichen Mittelpunkt dieses Semesters bildet ein Vortragsseminar über die Theorie der hyperkomplexen Zahlen, nach Dicksons Buch „Algebren u[nd] i[hre] Zahlentheorie", das Herr Jung, Herr Baer und ich gemeinsam veranstalten. Wir versprechen uns sehr viel von einem gründlichen Eindringen in diese schöne neue Theorie, die für die Weiterentwicklung der Arithmetik ganz sicher von ausschlaggebender Bedeutung sein wird.*

Im Zusammenhang mit der Tatsache, dass Hasse sich zur Zeit gerade mit Klassenkörpertheorie beschäftigte (lokaler und globaler), entnehmen wir hieraus, dass ihn wahrscheinlich schon im Sommer 1929 der Zusammenhang zwischen Algebrentheorie und Klassenkörpertheorie interessiert hatte. Sicherlich hatte er auch darüber in Prag mit Noether gesprochen.

Drittens hat Noether im Wintersemester 1929/30 (also im Semester, das auf diesen Brief folgte) in ihrer Vorlesung auf einen möglichen Zusammenhang zwischen lokaler Klassenkörpertheorie und Algebrentheorie hingewiesen. Das steht am Schluss der Vorlesungsausarbeitung [Noe83], die damals von Deuring ausgearbeitet (allerdings erst posthum publiziert) wurde. Wir verweisen dazu auf den späteren Brief vom 22. 11. 1931, in welchem Noether im Zusammenhang mit der lokalen Klassenkörpertheorie auf ihre Vorlesungsausarbeitung 1929/30 zu sprechen kommt.

Viertens zitiert Noether in ihrer o.g. Vorlesungsausarbeitung die Arbeit [Has31d] von Hasse, die zwar erst 1931 erschien und erst im Juni 1930 den Mathematischen Annalen zur Publikation eingereicht wurde. Noether muss also den Inhalt dieser Hasseschen Arbeit schon vor Fertigstellung gekannt haben. In der Arbeit bestimmt Hasse die Typen lokaler Schiefkörper. Vgl. dazu auch den Brief vom 25. 6. 1930, der auf die von Hasse eingereichte Arbeit direkt Bezug nimmt und gleichzeitig auf den Zusammenhang mit der Klassenkörpertheorie.

In diesem Licht erscheint es in der Tat plausibel, dass Hasse und Noether in Prag über das Thema „Algebren und lokale Klassenkörpertheorie" gesprochen haben, und dass also der vorliegende Brief gedeutet werden kann als ein erstes Anzeichen für die Entwicklung der Ideen, die schließlich in der Hasseschen Arbeit [Has33b] ihren Höhepunkt fand, als es gelang, das Artinsche Reziprozitätsgesetz der Klassenkörpertheorie mit algebrentheoretischen Hilfsmitteln zu beweisen.

[4] Noether zitiert hier ihre eigene große Arbeit „Hyperkomplexe Größen und ihre Darstellungstheorie" [Noe29], die gerade erst erschienen war.

[5] Noether schreibt versehentlich $a_i \cdot e_1 = e_1 \cdot a_i = e_i$.

[6] Das Wort „Daraus" ist im Original ausgestrichen.

[7] Noether bezieht sich hier auf ihren Vortrag auf der DMV-Jahrestagung in Prag im September 1929 über Differenten.

[8] Noether fügt hier eine Fußnote ein: „*Hoffentlich können Sie 4. lesen; mit vereinfachten Beweisandeutungen geht es doch nicht! Das wird falsch!*" Sie entschuldigt sich damit für die etwas unleserliche Darstellung in diesem Abschnitt, in dem sich ausgestrichene Texte und fast unleserliche Einfügungen häufen. Offenbar wollte sie zunächst nur eine vereinfachende Beweisandeutung schreiben und entschied sich dann doch, etwas genauer zu sein.

[9] Gemeint ist Abschnitt (7.), Seite 72 in Hasses Klassenkörperbericht [Has27a], Teil Ia. Die Seitenangabe 271 bei Noether ist also durch 72 zu ersetzen. In diesem Abschnitt (7.) bei Hasse geht es um die Hilbertsche Verzweigungstheorie, und insbesondere die Wirkung der Zerlegungs- und Trägheitsgruppe auf die Primideale des Galoisschen Erweiterungskörpers.

[10] Gemeint ist der §12 von Teil Ia des Hasseschen Klassenkörperberichts [Has27a]. In dem von Noether zitierten Satz 12 wird die Ordnung der 1-Kohomologiegruppe der Einheiten eines Zahlkörpers berechnet, und es zeigt sich, dass diese nicht verschwindet.

[11] Für irgendeinen $\mathfrak{G}$-Modul $\mathfrak{J}$ bedeuten die Ausführungen Noethers nichts anderes, als dass die erste Kohomologiegruppe $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{J})$ durch die Gruppenordnung annulliert wird. Es handelt sich also hier um die ersten Ansätze zu einer algebraischen Kohomologietheorie. In der speziellen von Noether beschriebenen Situation fragt sie nun, ob es einen (natürlichen) Faktormodul von $\mathfrak{J}$ gibt, in dem die erste Kohomologie verschwindet. – Die Bezeichnung „Hauptgeschlechtssatz" benutzt Noether in ziemlich allgemeinem Sinn; es handelt sich dabei immer um das Verschwinden von

eindimensionalen Kohomologiegruppen bezw. gewissen Untergruppen davon. Der Satz steht in engem Zusammenhang mit dem Lokal-Global-Prinzip für Algebren, welcher (in heutiger Terminologie) damit gleichbedeutend ist, dass die eindimensionale Kohomologie der Idelklassengruppe verschwindet. Noether hat ihre allgemeinen Ideen dazu später in ihrem Züricher Vortrag [Noe32a] erläutert, im Detail publiziert in den Mathematischen Annalen [Noe33a]. In dem vorliegenden Brief sehen wir den Anfang dieser Betrachtungen.

[12] Die „Artinsche Zuordnung" bedeutet die Zuordnung der unverzweigten Primideale $\mathfrak{p}$ des Grundkörpers zu ihren Frobenius-Automorphismen der Galoisgruppe der Erweiterung. Im §8 von Teil I des Hasseschen Klassenkörperberichts [Has26a] wird der Satz von der arithmetischen Progression unter dem Aspekt der Klassenkörpertheorie behandelt.

[13] Das „Nichtkommutative" in diesem Zusammenhang besteht darin, dass die Galoisgruppe nicht kommutativ zu sein braucht; dies geht über die Klassenkörpertheorie hinaus, die sich ja nur auf abelsche Körpererweiterungen bezieht. – Mit „Speiser" meint Noether dessen Lehrbuch [Spe27] über Gruppentheorie; die erste Auflage erschien 1922.

---

18 07.10.1929, Noether an Hasse

Göttingen, 7. 10. 29

Lieber Herr Hasse!

Zuerst meinen herzlichen Glückwunsch zu Ihrer Berufung nach Marburg! Ich wußte von dem Vorschlag, nicht aber von der erfolgten Berufung. Es scheint mir sicher, daß Sie annehmen werden[1], und so habe ich gleich einige Wünsche.

Zuerst, sollten Sie etwa eine Assistentenstelle bewilligt erhalten, so würde ich mich sehr freuen, falls Sie Levitzky mit berücksichtigen würden. Er ist augenblicklich, zum erstenmal seit sieben Jahren, nach Hause gefahren; es ist aber sehr möglich, daß er im Lauf des Winters wiederkommt, und er wird sicher kommen, wenn er eine Anstellung in Aussicht hat.[2]

Das andere ist die Frage, ob es möglich ist, Alexandroff in Halle mit auf die Liste zu bringen. Ich weiß, daß Alexandroff es sich sehr wünscht, mit der Zeit an eine deutsche Universität zu kommen. Und da all seine Arbeiten in deutschen Zeitschriften publiziert sind – oder auch in Amerika in deutscher Sprache – wird vielleicht der Ausländer dort keine allzu großen Schwierigkeiten machen, zumal seine wissenschaftliche Bedeutung ja unbestritten ist. Außerdem schreibt er jetzt seine „Topologie" für die gelbe Sammlung; und schließlich hat er schon zwei Sommer für die Göttinger Gastvorlesungen von der Regierung Bezahlung erhalten, sogar mit Steuer-Abzug. Er liest übrigens diesen Winter neben Topologie auch Galoissche Theorie, natürlich modern; und arbeitet immer intensiv in Seminaren mit seinen Leuten. Es sind ja auch schon in den Annalen Arbeiten verschiedener Schüler von ihm erschienen, und weitere werden noch kommen. Daß er die deutsche Sprache vollkommen und fehlerlos beherrscht, werden Sie wissen.[3]

Damit wäre ich mit meinen Ausländer-Wünschen zu Ende!

Ihr Kalkutta-Himalaja-Vergleich ist sehr richtig. Wenn es möglich sein wird, mit hyperkomplexen Ansätzen noch in die arithmetischen Teile des Umkehrsatzes[4]

einzudringen, so glaube ich, werden diese Ansätze in einer Fortentwicklung meiner Prager Differentensätze[5] liegen – verbunden mit der formalen Theorie des Gruppenrings. Aber wann wird man so weit sein? Die Möglichkeit selbst ist ja gar nicht bewiesen – und doch scheint mir der Umkehrsatz als Struktursatz mit analytischen Methoden nichts zu tun zu haben![6] Jedenfalls hoffe ich, aus Ihren neuen Arbeiten einiges lernen zu können!

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 7.10.1929

[1]Hasse hatte den Ruf nach Marburg als Nachfolger von Hensel erhalten. Hensel war der „Doktorvater" von Hasse gewesen, und er war nun sein „väterlicher Freund" (nach den eigenen Worten Hasses). Deshalb konnte Noether (und auch alle anderen Mathematiker, die Hasse kannten) durchaus davon ausgehen, dass Hasse dem Ruf nach Marburg folgen würde. Er trat die Stelle in Marburg zu Ostern 1930 an.

[2]Zu Levitzky siehe Brief vom 12. 8. 1929.

[3]Der russische Mathematiker Paul Alexandroff (1896-1982) war oft zu Gast in Göttingen bei Emmy Noether. Und Emmy war 1928/29 in Moskau gewesen, auf Einladung von Alexandroff. Seine Arbeiten zur algebraischen Topologie wurden stark von Noether beeinflusst, insbesondere das auch von Noether erwähnte wegweisende Buch „Topologie", das er zusammen mit Heinz Hopf publizierte [AH35]. Dass er damals gerne einen Lehrstuhl in Deutschland angenommen hätte, war bisher nicht allgemein bekannt und ist nur durch diese Briefstelle von Emmy Noether belegt. Übrigens ist der Vorschlag von Noether offenbar nicht weiter verfolgt worden. Der Nachfolger von Hasse in Halle wurde Heinrich Brandt, der sich durch seine Arbeiten zur Arithmetik der Algebren verdient gemacht hatte. – Einige Briefe von Noether an Alexandroff sind kürzlich gefunden worden; sie wurden von Renate Tobies herausgegeben [Tob03].

[4]Es handelt sich um den Umkehrsatz der Klassenkörpertheorie. Er stammt von Takagi und besagt, dass jeder relativ-abelsche Körper als Klassenkörper beschrieben werden kann.

[5] Hier bezieht sich Noether wiederum auf ihren Vortrag auf der DMV-Tagung in Prag 1929, publiziert in [Noe83].

[6]Eine Methode, den Umkehrsatz ohne Benutzung analytischer Hilfsmittel zu beweisen, wurde erst viel später durch Chevalley und Nehrkorn [CN35] angegeben.

---

19 13.11.1929, Noether an Hasse, Postkarte

13. 11. 29

Lieber Herr Hasse!

Ich wollte mich erkundigen, ob Sie wohl schon bald Korrekturen Ihrer neuen Klassenkörpertheorie-Arbeiten bekommen werden?[1] Einer der besten hiesigen Studenten, der sich ganz von sich aus mit Klassenkörpern beschäftigt hat im Fall der Funktionenkörper einer Variablen mit rationalen oder algebraischen Koeffizienten (also Charakteristik *Null*) wartet sehr auf die mir versprochene Zusendung. - Er betrachtet in der *unendlichen* Gruppe der Divisorenklassen Untergruppen von endlichem Index, und die zugehörigen Faktorgruppen, die Klassengruppen.

Im Fall algebraisch abgeschlossenen Koeffizientenbereichs sind die Resultate fast trivial; es ist alles durch reine Gleichungen realisierbar.[2] Aber auch bei rationalen Koeffizienten hat er Ansätze: Übertragung des Riemann-Rochschen Satzes und Analogon zum quadratischen Reziprozitätsgesetz. Der Riemann-Rochsche Satz wird ja vermutlich die transzendenten Methoden, so weit wie möglich, ersetzen müssen.

Zugleich wollte ich Sie fragen, ob irgendwelche Aussichten für Levitzky in Marburg bestehen; da ich mich sonst vielleicht bei der Instituts-Einweihungsfeier, wo doch allerhand Leute kommen werden, für ihn bemühen kann. Werden Sie auch kommen? (3. Dezember) Die Einladungskarten werden wohl erst verschickt werden.[3]

Die Galoistheorie nichtkommutativer Körper kann ich jetzt, im Anschluß an Bemerkungen von van der Waerden, viel einfacher machen, und auf zweiseitig einfache hyperkomplexe Systeme ausdehnen. So werde ich sie wohl publizieren.[4]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 13.11.1929

[1]Es geht hieraus nicht hervor, von welchen Arbeiten Noether die Korrekturabzüge haben wollte. Im Jahre 1930 erschienen 6 Arbeiten von Hasse zur Klassenkörpertheorie.

[2]Der Student, von dem Noether spricht, ist Max Deuring. Er promovierte 1930 bei Noether mit einer Arbeit zur Klassenkörpertheorie algebraischer Funktionenkörper einer Variablen [Deu31a]. Allerdings handelt es sich dort nicht um Untergruppen von endlichem Index, sondern um endliche Untergruppen der Divisorenklassengruppe. – Für Funktionenkörper mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper haben später Kawada und Tate [KT55] die Deuringsche Theorie im Rahmen der Kohomologietheorie beschrieben, jedenfalls im unverzweigten Fall. Für den zahm-verzweigten Fall siehe Madan [Mad66].

[3]Am 3. 12. 1929 wurde der von der Rockefeller-Stiftung finanzierte Neubau des Göttinger Mathematischen Instituts eingeweiht. Es ist uns unbekannt, ob Hasse an der Einweihungsfeier teilgenommen hat.

[4]Siehe [Noe33b].

---

20 25.06.1930, Noether an Hasse, Postkarte

Frankfurt/M.[1] 25. 6. 30
Eschersheim
Haeberlinstr. 53

Lieber Herr Hasse!

Ihre hyperkomplexe p-adik hat mir sehr viel Freude gemacht.[2] An Blumenthal[3] werde ich sie etwa 7. Juli weitergeben können, da er erst dann vom Charkower Kongreß zurück ist[4]; die Annalen drucken aber augenblicklich rasch. Wollen Sie, bei der Korrektur, nicht beim letzten § eine Anmerkung machen, über die ähnlichen

Schlußweisen bei Prüfer – v. Neumann (Ihre Bezeichnung „Komponente“ für $\mathfrak{a}_p$ weist ja schon darauf hin).[5] Diese Schlußweise tritt jetzt bei Köthe[6], Pietrkowski[7] u.s.w. immer wieder auf. Das sollte man auch äußerlich bemerken.[8] – Übrigens glaube ich *nicht*, daß Prüfer – v. Neumann zum Übergang von der Klassenkörpertheorie im Kleinen zu der im Großen ausreicht; Sätze über Ideal*klassen* bekommen Sie ja auch jetzt nicht.[9] Ich glaube, man wird hier direkt parallel-laufend mit der Idealgruppe statt mit Körperelementen arbeiten müssen, wie das Dedekind (Gött. Nachr. 95) schon in der Modultheorie gemacht hat.[10]

In diesem Zusammenhang: aus der Klassenkörpertheorie im Kleinen folgt: ist Z zyklisch n-ten Grades über einem $\mathfrak{p}$-adischen Grundkörper K, so gibt es in K wenigstens ein Element $a \neq 0$, derart daß erst a^n Norm eines Z-Elements wird. Können Sie das direkt beweisen? Dann könnte man aus Ihren Schiefkörperergebnissen umgekehrt die Klassenkörpertheorie im Kleinen begründen; überlegt habe ich mir allerdings erst die erste Zeile des Isomorphiesatzes 1, S. 147 bei Ihnen; das andere ist Behauptung.[11]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 25.6.1930

[1]Im Sommersemester 1930 nahm Emmy Noether eine Gastprofessur in Frankfurt/M wahr, im Austausch mit Siegel, der in diesem Semester in Göttingen las. Diese Vorlesung von Siegel über analytische Zahlentheorie wurde von Noethers Schüler Deuring ausgearbeitet. Wie Martin Kneser in seinem Nachruf [Kne87] auf Deuring berichtet, schrieb Emmy Noether aus Frankfurt auf einer Postkarte an Deuring: „*Daß Sie die Siegel-Ausarbeitung machen, ist sehr schön; da kann ich im Winter seine halsbrecherischen Beweise in Ruhe lesen, was mir lieber ist als hören.*“

[2]Hasse hatte an Noether seine Arbeit „Über $\wp$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme“ [Has31d] zur Publikation in den Mathematischen Annalen geschickt. Emmy Noether fungierte als inoffizielle Herausgeberin der Mathematischen Annalen. Die Arbeit trägt das Eingangsdatum 18. 6. 1930. Also hatte Noether das Manuskript innerhalb einer Woche gelesen. Allerdings hatte Hasse sie wohl schon früher über den Inhalt dieser Arbeit informiert. Vgl. die Anmerkungen zum Brief vom 2. 10. 1929.

[3]Blumenthal war der geschäftsführende Herausgeber der Mathematischen Annalen.

[4]Die Universität Charkow war 1805 gegründet worden; dort befand sich auch das „Ukrainische Institut der Mathematischen Wissenschaften“, sowie die 1879 gegründete „Mathematische Gesellschaft zu Charkow“.

[5]Die Prüfersche Arbeit „Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie“ [Prü25] war in den Mathematischen Annalen erschienen. Bei v. Neumann handelt es sich um die Arbeit „Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen“ [vN26] in den Acta Szeged. Hasse hat offenbar die Anregung von Emmy Noether aufgegriffen, denn in §8 seiner Arbeit [Has31d] werden diese beiden Arbeiten von Prüfer und v. Neumann zitiert.

[6]Wahrscheinlich meint Noether die Arbeit „Abstrakte Theorie nichtkommutativer Ringe“ [Köt30].

[7]„Theorie der unendlichen abelschen Gruppen“ [Pie31a], „Untergruppen und Quotientengruppen unendlicher abelscher Gruppen“ [Pie31b]. Beide Arbeiten sind in den Mathematischen Annalen erschienen.

[8]Die von Noether angesprochene Schlussweise in §8 von Hasses Arbeit besteht im Übergang vom Lokalen ins Globale, genauer: die Charakterisierung globaler Bereiche durch ihre lokalen Komponenten. Zum Beispiel wird gezeigt, dass ein (Rechts- oder Links-)Ideal einer Maximalordnung durch seine lokalen Komponenten eindeutig bestimmt ist. Und dass es zu jedem System

von lokalen Idealen, die gewissen natürlichen Bedingungen genügen, stets auch ein globales Ideal gibt. Usw. Noether sieht das als Teil einer allgemeinen Schlussweise, die sich auch in anderen Situationen bewährt.

[9] Hasse schwebte vor, dass man aus der lokalen Klassenkörpertheorie („im Kleinen") den Übergang zur globalen Klassenkörpertheorie finden müsse. Bis heute ist das nicht in befriedigender Weise gelungen; die Idealklassen (oder Idelklassen) spalten sich eben *nicht* in lokale Komponenten auf. Noether hat dies, wie wir sehen, bereits damals erkannt.

[10] Dedekind hatte im Jahre 1895 zwei Arbeiten in den Göttinger Nachrichten publiziert. Offenbar meint Noether hier die zweite Arbeit [Ded95], mit dem Titel: „Über eine Erweiterung des Symbols $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ in der Theorie der Moduln". Dort liefert Dedekind eine modultheoretische Begründung der Theorie der Relativnormen von Idealen. Zu dieser Arbeit sagt Noether in den Gesammelten mathematischen Werken [Ded32] von Dedekind, dass sie „*im Großen auf arithmetische Fragen noch nicht angewandt wurde*", und sie fügt hinzu, dass die Arbeit für die Theorie der Relativkörper noch von Bedeutung werden könne.

[11] Gemeint ist der Isomorphiesatz $\overline{1}$ in Hasses Arbeit „Die Normenresttheorie als Klassenkörper im Kleinen" [Has30c] in Crelles Journal. Die erste Zeile des in Rede stehende Satzes lautet (mit den hier von Noether benutzten Bezeichnungen): *Die Galoissche Gruppe von $Z|K$ ist isomorph zur Normklassengruppe $K^\times/NZ^\times$.* Dieser Satz war im Rahmen der lokalen Klassenkörpertheorie von Hasse [Has30c] und F. K. Schmidt [Sch30] bewiesen worden (publiziert im Crelleschen Journal), doch beruhte die dortige Begründung auf der *globalen* Klassenkörpertheorie. Genauer: der Isomorphismus wird geliefert durch das $\mathfrak{p}$-adische Normenrestsymbol, das jedoch damals von Hasse nicht völlig im Lokalen definiert werden konnte, sondern wozu er die globale Klassenkörpertheorie heranziehen musste. Hier wünscht nun Noether einen „direkten" Beweis, also ohne Berufung auf die globale Klassenkörpertheorie.

Der Beweis lässt sich tatsächlich direkt führen, als unmittelbare Folge aus der Hasseschen Theorie der $\wp$-adischen Schiefkörper, auf die sich Noether in dem vorliegenden Brief bezieht. Aber es scheint so, dass Hasse selbst diesen Weg nicht sofort gesehen hat und also Emmy Noethers Frage mit „nein" oder „ich weiß nicht" beantwortet hat; wir schließen das aus einer Bemerkung Noethers in ihrem späteren Brief vom 2. 5. 1932.

Die Noethersche Frage läuft darauf hinaus, ob man $a \in Z$ so wählen kann, dass das verschränkte Produkt (a, Z, S) den genauen Exponenten n besitzt; dabei bedeutet S eine Erzeugende der Galoisgruppe von $Z|K$, auf deren Wahl es nicht ankommt. Nun zeigt Hasse in der Arbeit [Has31d] über $\wp$-adische Schiefkörper, dass es über K eine ausgezeichnete Divisionsalgebra vom Exponenten n gibt, nämlich das verschränkte Produkt $D = (\pi, W, F)$, wobei π ein Primelement von K ist, W die unverzweigte Erweiterung von K vom Grad n und F der Frobenius-Automorphismus von $W|K$. Demnach läuft die Noethersche Frage darauf hinaus, ob Z ein Zerfällungskörper von D ist, denn dann läßt sich Z in D einbetten, und somit kann D auch als verschränktes Produkt mit Z geschrieben werden: $D = (a, Z, S)$ mit geeignetem $a \in K$, das die genaue Ordnung n in Bezug auf die Normfaktorgruppe aus L besitzt.

Später, nämlich in der gemeinsamen Arbeit [BHN32] über den Hauptsatz der Algebrentheorie wird nun gezeigt, dass *jeder* Erweiterungskörper von K mit durch n teilbarem Grad ein Zerfällungskörper von D ist (Satz 3); dieser Beweis stammt von Hasse allein, und er benutzt dazu seine Ergebnisse aus der hier diskutierten Arbeit [Has31d]. Also hätte Hasse die Frage von Emmy Noether schon jetzt im positiven Sinne beantworten können.

Jedoch bereitete die darauf fußende Begründung der vollen lokalen Klassenkörpertheorie zunächst einige Schwierigkeiten beim Übergang von zyklischen zu abelschen Erweiterungen. Noether hat das in ihrem Züricher Vortrag 1932 zugegeben, wenn sie dort sagt, dass „noch neue algebraische Sätze über Faktorensysteme zu entwickeln waren". Das erledigte Chevalley in einer Arbeit im Crelleschen Journal [Che33a]. Aus heutiger Sicht handelt es sich dabei um die Grundlagen der Kohomologietheorie, insbesondere um Restriktion, Inflation und Verlagerung. Vgl. dazu den Brief vom 2. /3. 6. 1932.

21 10.10.1930, Noether an Hasse

10. 10. 30

Lieber Herr Hasse!

Schönen Dank für Artin![1] Die Sachen sind wirklich wunderschön! Mich reizen besonders die darin steckenden formalen Grundlagen; einiges Hyperkomplexe – einstweilen noch ganz unabhängig – habe ich mir überlegt, so das folgende:

Das verschränkte Produkt von K mit seinem Gruppenring (Gruppenring von K/k) wird wegen Faktorensystem *eins* ein voller Matrizenring über K. Jede Basis von K/k – zusammen mit der Einheit der identischen Darstellung des Gruppenringes – liefert eine Zerlegung in einseitig einfache, etwa Rechtsideale. Die entsprechende Linkszerlegung wird dann durch die komplementäre Basis von K/k erzeugt. Beschränkt man sich auf ganzzahlige Ideale, so gehören also Rechts- und Linkszerlegung komplementären Idealklassen von K/k an. Ich vermute, daß man so auch Sätze über Differentenzerlegung erhält, und dann nach Normbildung Zusammenhänge mit Artin. Aber das ist Zukunftsphantasie![2] Jedenfalls schönen Dank für die Überlassung des Briefs; die Zurücksendung hat sich etwas verzögert, da Deuring verreist war dem ich den Brief gern zeigen wollte. Der übrigens als formalen Grund seines Vertauschungssatzes etwas ganz ähnliches wie das obige erkannt hat: Übergang zum reziprok isomorphen Ring (Vertauschen von Rechts- und Linksmultiplikation) bei Vertauschen von Körper und Gruppe im zyklischen Fall, wenn man verschränktes Produkt mit beliebigem Faktorensystem zugrundelegt.[3]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 10.10.1930

[1] Hasse hatte an Noether zur Kenntnisnahme einen Brief von Artin an Hasse geschickt. Jener Brief war datiert vom 18. 9. 1930 und enthielt die Artinsche Ergänzung zu seiner Theorie der L-Reihen, insbesondere die Theorie der Artinschen Führer. Hierzu vgl. auch [Roq00].

[2] Einen Teil dieser Zukunftsphantasie realisierte Noether später in ihrer Arbeit [Noe32b] über lokale Ganzheits-Normalbasen im zahm-verzweigten Fall, erschienen im Hensel-Festband des Crelleschen Journals 1932.

[3] Hier spielt Noether an auf Deurings algebrentheoretischen Beweis des Vertauschungssatzes für das Hilbertsche Normenrestsymbol [Deu31b].

22 02.11.1930, Noether an Hasse, Postkarte

Göttingen, 2. 11. 30

Lieber Herr Hasse!

Es scheint tatsächlich daß Teubner einfach noch nicht an Koschmieder geschrieben hat. Die Tochter von Fricke – Frau Landauer, Braunschweig, Kaiser-Wilhelmstr. 17 – fragte mich wegen des Teubnerschen Vorschlags „Koschmieder" um Rat, und als ich zustimmte, schrieb sie mir, daß sie und ihr Bruder jetzt mit Teubner alles fest machen wollen. Das war vor etwa drei Wochen; vielleicht ist es am einfachsten, Sie wenden sich direkt an Frau Landauer, um zu hören wie die Angelegenheit steht.[1]

Die Idealdifferente ist Ihnen versprochen.[2]

Von Jena erzählte mir Courant und schrieb mir auch Krull befriedigt. Er hat Ihnen doch erzählt, daß er Ihr Kriterium für Prim-Element-Zerlegung jetzt in ein notwendiges und hinreichendes umgewandelt hat, durch einfache Zufügung eines zu a primen Faktors![3] Läßt sich eigentlich Wegner nicht kürzen? Er hat ja im ganzen drei Arbeiten über den Gegenstand.[4]

Deuring würde sehr gern wissen, ob er ein Exemplar des Berichts bekommt, da er ihn sich sonst kaufen will; geschenkt ist ihm lieber![5] (Hospitalstr. 3a). Ich halte es nicht für ausgeschlossen, daß man mit neuen Ansätzen von ihm auch an die Frage der 5-Axiome-Ringe heran kann: es handelt sich um die Konstruktion allgemeiner Bewertungen.[6]

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 2.11.1930

[1] Robert Fricke (Braunschweig) war Schüler von Dedekind und gab gemeinsam mit Emmy Noether und Øystein Ore die gesammelten Werke von Dedekind heraus [Ded32]. Während der Arbeiten an der Herausgabe starb Fricke im Jahre 1930. Offenbar kümmern sich Noether und Hasse um den Nachlass Frickes, der bei dem Teubner-Verlag ein bekanntes zweibändiges Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung [Fri19] publiziert hatte.

[2] Auf der Jahrestagung der DMV im September 1929 in Prag hatte Noether einen Vortrag über „Idealdifferentiation und Differente" gehalten. Offenbar hatte Hasse um das Manuskript gebeten. Die Arbeit hierzu von Emmy Noether ist jedoch zu ihren Lebzeiten nicht mehr erschienen, sondern erst posthum im Crelleschen Journal [Noe50]. Wie dort berichtet wird, hatte Noether das Manuskript schon im Winter 1927/28 niedergeschrieben, wollte jedoch Teile davon vor einer Publikation noch genauer überarbeiten.

[3] Für das Hassesche Kriterium vgl. den Brief vom 11. 12. 1926. Das Krullsche Kriterium findet sich in der Arbeit [Kru31] auf Seite 11, Satz 2.

[4] Gemeint ist Udo Wegner. In Band 105 (1931) der Mathematischen Annalen hatte Wegner 7 Arbeiten publiziert. Im folgenden Band 106 erschien eine Note [Has32f] von Hasse, in welcher

er zeigte, dass das Hauptresultat einer dieser Arbeiten nicht richtig ist. (Es handelt sich um die Reduzibilität von Polynomen, die fast überall zerfallen.) Hasse beruft sich dabei auf eine mündliche Mitteilung von Artin aus dem Jahre 1927. Und er gibt eine Richtigstellung des Wegnerschen Satzes.

[5]Es handelt sich um den Hasseschen Klassenkörperbericht Teil II [Has30a], der gerade erschienen war.

[6]„5-Axiome-Ringe“ ist die Noethersche Bezeichnung für die heute so genannten „Dedekind-Ringe“. Die 5 Noetherschen Axiome finden sich in ihrer Arbeit [Noe26a]. Offenbar arbeitete Deuring daran, die Dedekind-Ringe bewertungstheoretisch zu charakterisieren.

---

23 19.12.1930, Noether an Hasse

Göttingen, 19. 12. 30

Lieber Herr Hasse!

Ja, es ist jammerschade, daß all Ihre schönen Vermutungen nur in der Luft schweben und nicht mit festen Füßen auf der Erde stehen: denn ein Teil von ihnen – wieviel übersehe ich nicht – stürzt rettungslos ab durch Gegenbeispiele in einer ganz neuen amerikanischen Arbeit: Transactions of the Amer. Math. Society, Bd. 32; von Albert. Daraus folgt zunächst, daß der Exponent wirklich *kleiner* sein kann als der Index, schon beim rationalen Zahlkörper als Zentrum; und damit also weiter daß Ihre Formentheorie sich *nicht* auf Formen höheren Grades übertragen läßt. Ob Ihre Vermutung mit dem zyklischen Zerfällungskörper gilt, wird zum mindesten zweifelhaft.[1]

Genauer handelt es sich um folgendes: Albert hat ja in Bd. 31[2] bewiesen, daß alle Schiefkörper vom Index 4, mit rationalem Zentrum – falls solche existieren – direkte Produkte von zwei Schiefkörpern vom Index zwei werden; woraus unmittelbar folgt, daß sie Exponenten zwei haben, in genauer Analogie mit dem Brauerschen Beispiel. In Bd. 32[3] gibt er nun, Seite 188, wirklich zahlenmäßig ein Beispiel eines solchen Schiefkörpers an; also $n = 4$, $q = 2$. In diesen läßt sich weiter ein zyklischer Körper 4. Grades einbetten, sodaß also schon das Quadrat von β Norm wird; Dickson ist hinreichend, aber nicht notwendig.[4]

Weiter gibt er notwendige und hinreichende Bedingungen an, daß für $n = 4$ *kein* zyklischer Einbettungskörper 4. Grades existiert; ob aber hier rationalzahlige Lösungen existieren, wird nicht gesagt. Sehr möglich können Sie aber die erste, algebraische, d.h. formentheoretische Form der Bedingungen leicht übersehen, und sich ein Gegenbeispiel konstruieren, dessen Existenz mir garnicht ausgeschlossen erscheint.

Weiteres Zahlenmaterial findet sich in der in der Einleitung zitierten Arbeit von Archibald, ganz am Schluß. Archibald ist dieses Semester hier; und daher rührt auch meine amerikanische Literaturkenntnis. Ob aber unter seinen Systemen nullteilerfreie auftreten, weiß er nicht.[5]

Wenn auch Ihr zyklischer Zerfällungskörper zunichte geworden ist, so lassen Sie mich das wissen!

Ich will jetzt den (absoluten) Klassenkörper verschränkt mit seiner Gruppe multiplizieren: dann bekomme ich in dem durch die Gruppe erzeugten auflösbaren Körper, bei geeigneter Wahl des Faktorensystems – der den zyklischen Faktoren der Gruppe entsprechenden $s_i = \sigma_i^{k_i}$ – die Heckeschen idealen Zahlen; die s_i brauchen nur gleich der k_i-ten Potenz der zugeordneten Idealklasse gesetzt zu werden. In die Vieldeutigkeit der s_i, bedingt durch die Einheiten, und die entsprechenden Vieldeutigkeiten der Schiefkörper, müssen dann Einheiten, Hauptgeschlecht u.s.w. hineinspielen! Das treibt aber einstweilen im Nebel! [6]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 19.12.1930

[1] Offenbar hatte Hasse an Noether eine Reihe von systematisch begründeten Vermutungen zur Algebrentheorie über Zahlkörpern geschrieben. Wir wissen nicht genau, welche Vermutungen das waren. Aber aus der Noetherschen Antwort wissen wir, dass zumindest folgende drei Vermutungen dabei waren: (1) der Index einer einfachen Algebra ist gleich ihrem Exponenten. (2) Das Lokal-Global-Prinzip für einfache Algebren. (Noether spricht von „Formentheorie“ in Anlehnung an Hasses Theorie der quadratischen Formen, für die er ja ein Lokal-Global-Prinzip in seiner Dissertation bewiesen hatte; hier sind offenbar die Normformen von einfachen Algebren gemeint.) (3) Jede einfache Algebra besitzt einen zyklischen Zerfällungskörper. Somit ist dieser Noether-Brief ein wichtiges historisches Dokument, können wir doch daraus entnehmen, wann ungefähr Hasse diese Vermutungen explizit formuliert hatte, nämlich im Dezember 1930. Dass Noether einen Teil der Hasseschen Vermutungen als durch ein Gegenbeispiel widerlegt bezeichnet, war ein Irrtum; Hasse hatte sie sogleich darauf aufmerksam gemacht, und im nächsten Brief vom 24. Dezember stellt sie das auch selbst fest. – Den Hinweis auf die Möglichkeit eines Lokal-Global-Prinzips für Algebren hatte Hasse übrigens durch Emmy Noether erhalten: Während eines der häufigen Besuche Hasses in Göttingen machten beide einen Spaziergang auf den nahegelegenen Berg Hanstein, und dabei berichtete Hasse ihr, dass das Lokal-Global-Prinzip für Normen zwar bei zyklischen Körpern gilt, nicht aber im allgemein abelschen Falle. Daraufhin wies ihn Noether darauf hin, dass man statt Normen die zerfallenden Faktorsysteme betrachten solle. Wie es scheint, hatte das den Anstoss zur Formulierung des Lokal-Global-Prinzips für Algebren gegeben. Vgl. dazu Noethers Brief vom 12. 11. 1931, in dem sich Noether auf „Hanstein“ bezieht.

[2] Gemeint ist Band 31 der Transactions of the American Mathematical Society (1929) mit der Arbeit [Alb29]. (Achtung: In Band 31 der Annals of Mathematics (1930) findet sich ebenfalls eine Arbeit von Albert [Alb30a], mit einem ähnlichen Thema, nämlich Quaternionenalgebren über einem quadratischen Zahlkörper. Noether aber meint offenbar die erstgenannte Arbeit, welche i.w. die Dissertation von Albert enthält.)

[3] [Alb30b]

[4] „Dickson“ bedeutet hier das Norm-Kriterium dafür, dass eine zyklische Algebra eine Divisionsalgebra ist. Gegeben sei ein verschränktes Produkt $A = (Z, \sigma, \beta)$ eines zyklischen Körpers $Z|K$ vom Grad n mit erzeugendem Automorphismus σ und Parameter $\beta \neq 0$ im Grundkörper K. Dann besagt das Norm-Kriterium: Wenn n der kleinste Exponent ist, für welchen β^n eine Norm aus L ist, dann ist A eine Divisionsalgebra. Vgl. Dickson, „Algebren und ihre Zahlentheorie“ [Dic27], §42. Auch Hasse in seiner amerikanischen Arbeit „Theory of cyclic algebras over an algebraic number field“ [Has32d] spricht von „Dickson's criterion“. In Wahrheit stammt das Kriterium jedoch von Wedderburn [Wed14]. Dass dieses Kriterium von den deutschen Mathematikern als „Dicksons Kriterium“ bezeichnet wurde, lässt darauf schliessen, dass die Arbeiten von Wedderburn in Deutschland ziemlich unbekannt waren und die Wedderburnschen Resultate zur Struktur der Algebren erst durch das Buch von Dickson bekannt wurden. – Dass Emmy Noether hier einem Irrtum erlegen ist, hat sie selbst bemerkt; vgl. den nächsten Brief vom 24. 12. 1930. Für einen Zahlkörper K als Grundkörper ist nämlich das Norm-Kriterium in der Tat nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig.

[5] Es handelt sich um [Arc28]. Diese Arbeit ist zitiert in der Einleitung der Arbeit von Albert, auf

die sich Noether bezieht. – Archibald hielt sich damals in Göttingen auf und hatte mathematischen Kontakt zu Emmy Noether.

[6]Zum Zeitpunkt dieses Briefes war der Hauptidealsatz der Klassenkörpertheorie bereits bewiesen worden: [Fur29]. Es war Noether also bekannt, dass jedes Ideal eines Zahlkörpers in seinem absoluten Klassenkörper zu einem Hauptideal wird. Die jeweiligen Erzeugenden dieser Hauptideale sind offenbar das, was Noether als „Heckesche ideale Zahlen“ bezeichnet. Noether versucht hier offenbar, eine explizite Konstruktion dieser idealen Zahlen mit Hilfe des zerfallenden verschränkten Produkts durchzuführen. Es ist unklar, ob sie damit auch einen neuen, „hyperkomplexen“ Beweis des Hauptidealsatzes anstrebt. Die hier angedeutete Noethersche Idee ist, wie es scheint, nicht weitergeführt worden.

---

24 24.12.1930, Noether an Hasse

Göttingen, 24. 12. 30

Lieber Herr Hasse!

Anbei erhalten Sie die Metamorphose Ihres Schiffbilds[1] in ein Negerweib – vom Maphafilm[2]; im übrigen aber ist dieser Brief ein pater peccavi. Ihre Luftschlösser sind nämlich noch garnicht umgefallen – vielleicht sind Sie jetzt darüber betrübt – ich habe aus der Albertschen „Fürchterlichkeit“[3] ziemlich genau das Gegenteil dessen herausgelesen was drinstand. Erst Ihr Gegenbeispiel hat mir die Sache klar gemacht.

Also: 1) In der ersten Arbeit (Transactions 31) wird gezeigt, daß jeder Schiefkörper mit rationalem Zentrum vom Index 4 (kurz Schiefkörper) einen maximalen Abelschen Teilkörper vom Grad 4 besitzt.

2) In der zweiten Arbeit (Transactions 32) wird die daraus folgende verschränkte Produktdarstellung durchdiskutiert; und es werden die diophantischen Bedingungen für zyklische Erzeugung aufgestellt.

3) In einer dritten Arbeit (Ann. Math. 30 (1929), S. 621) wird gezeigt, daß das direkte Produkt[4] von zwei verallgemeinerten Quaternionenkörpern stets Nullteiler enthält; aus der Theorie der quadratischen Formen werden solche konstruiert.

Mein Fehler war, daß ich aus 1) und 2) auf direkte Produktbildung schloß. In Wahrheit verhält es sich so:

Sei $Z = R(\alpha_1) \times R(\alpha_2)$ der Abelsche Teilkörper; $G = \{1, \beta_1, \beta_2, \beta_1\beta_2\}$ die zugehörige Gruppe; mit $\beta_1^{-1}\alpha_1\beta_1 = \overline{\alpha}_1$ und $\beta_2^{-1}\alpha_2\beta_2 = \overline{\alpha}_2$; $\beta_1^2 = b_1$, $\beta_2^2 = b_2$, $\beta_1\beta_2 = c\beta_2\beta_1$. Dann brauchen b_1 und b_2 garnicht rational zu sein, und c braucht nicht der Eins assoziiert zu sein (d.h. durch Übergang zu Erzeugenden β_i' in 1 überzugehen); das hatte ich, da ich die „Faktorensysteme“ b_1, b_2, c mir nicht aufschrieb, übersehen.[5]

Man kann nur schließen: b_1 gestattet die Transformation mit β_1, liegt also in $R(\alpha_2)$; ebenso b_2 in $R(\alpha_1)$. (Zwischen b_1, b_2, c und Konjugierten besteht noch eine Assoziativbedingung). Tatsächlich müssen nun b_1 und b_2 *nichtrational* sein: das ist in 3) gezeigt. (Ebenso natürlich noch das durch b_1, b_2, c ausdrückbare $(\beta_1\beta_2)^2$

nicht rational; da ein Unterkörper mit gleichem Zentrum stets direkter Faktor). Das ist doch wirklich das Gegenteil von dem was ich neulich behauptete!

Es scheint also doch ganz wahrscheinlich, daß bei algebraischen Zahlkörpern als Zentrum immer Exponent und Index übereinstimmen. Trotzdem scheint mir das Heranziehen der Abelschen Zerfällungskörper prinzipiell richtig. Ich vermute, daß man hier für Nichtnullteiler die Bedingungen vom Charakter des „nicht rational“ leichter erfüllt, die die Bedingung „Nichtnorm“ ergänzen, falls die Sache komplizierter wird als im p-adischen.[6]

Solche Ergänzungen sind ja natürlich nötig, wenn – wie im Brauerschen Beispiel – durch direkte Produktbildung der Exponent kleiner als der Index wird; die Nichtnormbedingungen sagen ja nur etwas über den Exponenten aus. Die Brauersche Konstruktion seines Beispiels basiert aber darauf, daß das Zentrum $R(x,y)$ mit den beiden quadratischen Erweiterungskörpern $R(x,y,\sqrt{x}\,)$ und $R(x,y,\sqrt{y}\,)$, also mit $R(\sqrt{x},y)$ und $R(x,\sqrt{y}\,)$ isomorph wird, was im absolut Algebraischen ja nicht eintreten kann.[7] Vielleicht ist eine solche Isomorphie sogar notwendig, um den Exponenten herabzudrücken, ich weiß es nicht!

Sie sehen also, daß Ihre Frage wann direkte Produkte aus Schiefkörpern wieder solche werden, nicht einfach ist. Bei teilerfremden Graden ist es immer erfüllt; das haben Köthe und Brauer bewiesen; es ist Ihnen vielleicht auch bekannt.[8]

Mit guten Weihnachts- und Neujahrswünschen, für Menschen und Schiefkörper, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 24.12.1930

[1]Das „Schiffsbild“ ist eine Porträt-Photographie von Emmy Noether, die Hasse im September 1930 bei einer gemeinsamen Schiffsfahrt über die Ostsee zur Jahrestagung der DMV in Königsberg aufgenommen hatte. – Das Bild ist publiziert in der Noether-Biographie von Auguste Dick [Dic70]. Am 3. 5. 1970 schickte Frau Dick ein Exemplar der Biographie an Hasse; in ihrem Begleitschreiben dazu heißt es:

> *. . . Das Foto auf der Titelseite erfreut Sie wohl? Ich hatte dem Verlag auch ein Bild aus dem Archiv der Universität Göttingen angeboten, von einem Berufsfotografen aufgenommen, Emmy Noether in feierlicher Positur. Man hat Ihre Aufnahme vorgezogen, und ich bin froh darüber. . .*

Auch wir haben hier das Schiffsbild vorgezogen. – Zum Schiffsbild vgl. auch den Brief vom 2.12.1931.

[2]„Mapha“ war eine studentische Vereinigung von Mathematik- und Physikstudenten. Offenbar aus Anlass einer studentischen Fete hatte die Mapha in scherzhafter Weise eine Photomontage hergestellt: Auf dem Photo eines afrikanischen Marktes, auf welchem Marktfrauen ihre Waren anbieten, hatte man einer Marktfrau den Kopf von Emmy Noether aus dem „Schiffsbild“ montiert. Möglicherweise hatte man für andere Göttinger Professoren ähnliche Scherz-Bilder angefertigt.

[3]Dieses Wort soll offenbar andeuten, dass Noether mit dem Stil Alberts nicht einverstanden war. Albert war ein Schüler von Dickson und benutzte in seinen Arbeiten – wenigstens anfangs – die Art und Weise der Darstellung, wie sie auch bei Dickson zu finden ist. Ganz verschieden davon ist die abstrakte Denkweise, die sich in dem Stil der Noetherschen Arbeiten und ihrer Schüler niederschlägt.

[4]Die heutige Terminologie ist „Tensorprodukt“ statt „direktes Produkt“.

[5]Die Gruppe G ist das direkte Produkt der Gruppen $G_1 = \langle\beta_1\rangle$ und $G_2 = \langle\beta_2\rangle$. Die 2-Kohomologie von G ist jedoch nicht das direkte Produkt der 2-Kohomologie von G_1 mit der von

G_2, sondern es sind noch die sog. Künnethschen Formeln zu beachten. Der Faktor c repräsentiert das durch die Künnethschen Formeln gegebene Zusatzglied. Man beachte, dass es zu Noethers Zeiten noch keine systematische Kohomologietheorie für Gruppen gab; diese hat sich vielmehr aus den mannigfachen Erfahrungen aus dem Rechnen mit Faktorensystem heraus entwickelt. Hier sehen wir ein Beispiel, wie Noether solchen Erfahrungen begegnete.

[6]Die Arbeit von Hasse über $\wp$-adische Schiefkörper [Has31d] war zum Zeitpunkt dieses Briefes noch nicht erschienen, aber Noether kannte ihren Inhalt. Vgl. Brief vom 25. 6. 1930. Hasse hatte in der Arbeit gezeigt, dass über einem $\mathfrak{p}$-adischen Körper jeder Schiefkörper ein zyklisches verschränktes Produkt ist. – Noether hatte offenbar im Sinn, für ein verschränktes Produkt mit *abelscher* Galoisgruppe ein Kriterium für Nullteilerfreiheit zu finden. Albert hatte ein solches Kriterium in Form der Unlösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen aufgestellt, aber das ist im Einzelfall schwer zu verifizieren. Die endgültige Lösung der Frage – und nicht nur bei abelschen verschränkten Produkten – wurde schliesslich durch die *Hasse-Invarianten* von Algebren geliefert [Has33b] – jedenfalls wenn der Grundkörper ein globaler Körper ist. Der Exponent einer Algebra ist nämlich bestimmt als der Hauptnenner aller ihrer Hasse-Invarianten; wenn dieser gleich dem Rang der Algebra ist, dann handelt es sich um einen Schiefkörper.

[7]Das Brauersche Beispiel findet sich in seiner Arbeit [Bra30]. Der Grundkörper ist dabei der rationale Funktionenkörper in zwei Variablen über $\mathbb{Q}$. – Später, 1932, diskutierte Albert [Alb30b] dieselbe Konstruktion weil, wie er sagte, die Brauersche Argumentation im allgemeinen falsch sei. Er räumte jedoch in einer Fußnote am Schluss der Arbeit ein, dass es sich um ein Problem der „interpretation of language, rather than a mathematical error“ handele. In Wahrheit sind beide Arbeiten korrekt, Brauers sowohl als Alberts. Die Konstruktionen von Albert sind allgemeiner als die von Brauer. Albert gelang es, nicht-zyklische Divisionsalgebren vom Index 4 zu konstruieren, während Brauer die verwandte, aber nicht identische Frage beantwortet hatte, ob es Algebren vom Index 4 gibt, deren Exponent kleiner als der Index ist. – Bemerkung: In [Cur99] wird irrtümlich behauptet, dass Brauer [Bra30] der erste gewesen sei, der eine nicht-zyklische Divisionsalgebra vom Index 4 konstruiert habe, und dies wird in [FS05] wiederholt. In Wahrheit wurde diese Frage in [Bra30] nicht diskutiert, und Albert in [Alb30b] gebührt die Priorität dafür.

[8]Die Köthesche Arbeit [Köt31] erschien in den Mathematischen Annalen. Diese Arbeit wurde jedoch erst im Anschluss an die Brauersche Arbeit [Bra30] geschrieben, in welcher der Satz ebenfalls steht; dabei handelt sich um dieselbe Arbeit, die Noether oben im Zusammenhang mit dem „Brauerschen Beispiel“ zitiert. Wenn sie jetzt Köthe zuerst zitiert und nicht Brauer, dann mag das daran liegen, dass sie über die Kötheschen Arbeiten besser informiert war, weil sich Köthe damals in Göttingen aufhielt. – Derselbe Satz wurde ungefähr zur selben Zeit unabhängig auch von Albert bewiesen [Alb31a]. Übrigens: Wenn der Grundkörper ein Zahlkörper ist, so gilt auch die Umkehrung des Satzes; das folgt z. Bsp. aus den späteren Resultaten in der gemeinsamen Arbeit von Brauer-Hasse-Noether [BHN32].

---

25 08.02.1931, Noether an Hasse

Göttingen, 8. 2. 31

Lieber Herr Hasse!

Sie bekommen als Antwort auf Ihre Postkartenfragen viel Hyperkomplexes zur Verarbeitung, vielleicht mehr als Ihnen lieb ist.

Fitting hat sein Strukturresultat auf S. 4 als Satz 1 ausgesprochen; zum Verständnis müssen Sie sich aber wohl doch erst durch die Automorphismen durcharbeiten[1] – er hat sie für mein Gefühl ausgezeichnet dargestellt (ein Körper braucht natürlich nicht kommutativ zu sein). Sie sehen dann auch, wie die Artinschen Sätze durch Spezialisierung herauskommen (Satz 3 und 4).[2] Sein Satz

1 (bezw. 2) ist übrigens im hyperkomplexen Fall einfach die begriffliche Deutung des Satzes 10, S. 130 der deutschen Ausgabe von Dickson[3]; aber erst durch den Automorphismen-Ring kommt man zur Matrizendarstellung. Ich habe mich über die Fitting-Arbeit, die in Fragestellung und Durchführung *vollständig selbständig* ist – wenn auch beeinflußt durch meine Begriffsbildungen – und viel mehr enthält als diese angegebenen Resultate sehr gefreut; er wird im Mai damit promovieren, hat übrigens schon 11 Semester.[4] Der Übergang von Satz 1 zu Satz 2 entspricht meinem Übergang zu K (S. 667, oder Dickson S. 119 (12)).[5]

Die Antwort auf die Frage nach den maximalen Teilkörpern können Sie aus van der Waerden holen (die vorangehenden Kapitel liegen schon als Fahnen vor), der meine Beweise von der Sommervorlesung 1928 wesentlich vereinfacht hat; so ähnlich habe ich sie 29/30 gebracht[6] (allerdings mit Einführung des „reziproken Darstellungsmoduls") anstelle von S. 117 u. ff. (und auch sonst viel allgemeiner, wie ich jetzt bemerke; aber auch das zum Teil mit van der Waerdens Vereinfachungen). Den Satz finden Sie auf S. 122, brauchen also nur von 117-122 zu lesen: ich habe das ganze geschickt, weil ich nicht weiß ob die Bezeichnungen unabhängig verständlich sind. - Wie ich jetzt sehe, hat van der Waerden mehr als mir bekannt war, nämlich den Satz auf S. 121 unten.[7] Ich glaube R. Brauer hat diesen Satz in Königsberg vorgetragen.[8]

Für vollständig reduzible Moduln hat übrigens van der Waerden auch die Fittingsche Konstruktion des Artinschen Rings (54-56 in neuer Fassung, obenan). Das stammt von Rabinowitsch in Moskau, war aber Fitting nicht bekannt.

Nun zum „Schiefkongress".[9] Ich werde also „Hyperkomplexe Struktursätze mit zahlentheoretischen Anwendungen" bringen, um dem Kind einen Namen zu geben. Übrigens hoffe ich tatsächlich, etwas über Führersätze sagen zu können: erste Ansätze habe ich, und zwar für die hyperkomplex leichter zugängliche Differentenzerlegung, aus der dann die Artinsätze durch Normbildung folgen würden. Ob ich aber soweit komme, weiß ich nicht, sonst kommen die alten Anwendungen!

Ich würde als Vortragsreihenfolge vorschlagen: R. Brauer, Noether, Deuring, Hasse. Dann kann jeder sich auf den Vorhergehenden berufen. Die übrigen Vorträge sind ja unabhängig.

Dann möchte ich auch vorschlagen, auch meinen Rockefeller-Stipendiaten für den nächsten Sommer – der jetzt bei von Neumann in Berlin ist – aufzufordern: Dr. J. Herbrand, Berlin-Charlottenburg, Mommsenstr. 47, bei Ehrmann. Als Rockefellerstipendiat bekommt er die Reise bezahlt; Sie haben also keine Kosten. Er kam nach Halle, und hat am meisten von allen von meinen Sachen verstanden.[10] Er hat bis jetzt außer Logik nur Zahlentheorie gearbeitet (die er aus Ihrem „Bericht" und Ihrer Normenresttheorie gelernt hat[11]); ich dachte an ihn nur als Zuhörer. Eventuell könnte er aber über seine durch die Einheitengruppen vermittelten ganzzahligen Darstellungen der Galoisgruppe vortragen; das ist wahrscheinlich nahe mit meinen hyperkomplexen Sachen zusammenhängend (C[omptes] R[endus] Januar[12].). Wir hatten in Halle alle einen ausgezeichneten Eindruck von ihm.

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 8.2.1931

[1]Es handelt sich um die Dissertation 1931 von Fitting mit dem Titel „Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen.“ In erweiterter Form wurde sie publiziert in den Mathematischen Annalen [Fit32]. Das Exemplar, auf das sich Noether hier bezieht, unterscheidet sich von der publizierten Fassung; die von Noether angegebenen Seitenzahlen und Satznumerierungen entsprechen nicht denen der publizierten Version. – Das Ziel der Fittingschen Arbeit ist eine „Neubegründung der Theorie der hyperkomplexen Systeme, allgemeiner beliebiger Ringe mit Doppelkettensatz“. Die neuartige Methode besteht darin, einen solchen Ring als Gruppe mit sich selbst als Operatorenbereich anzusehen; demgemäß ordnet sich das angegebene Ziel als Spezialfall in die allgemeine Strukturtheorie von Endomorphismenringen von Gruppen ein. (Fitting spricht von „Automorphismen“, während sich heute die Bezeichnung „Endomorphismus“ durchgesetzt hat.) Offenbar hatte Hasse von dieser Dissertation gehört und um Details gebeten.

[2]Hier bezieht sich Noether auf die Arbeit [Art28b], in der eine allgemeine Strukturtheorie der Ringe mit Doppelkettensatz, d.h. der heute so genannten Artinschen Ringe, gegeben wird. (In diesem Zusammenhang ist „Doppelkettensatz“ zu verstehen als die gleichzeitige Gültigkeit der Maximalbedingung und der Minimalbedingung für Ideale. Nicht zu verwechseln mit der Noetherschen Bedingung „Maximalbedingung für Ideale“ und „Minimalbedingung modulo jedem Ideal $\neq 0$“, was Noether als „Maximalbedingung und eingeschränkte Minimalbedingung“ bezeichnet. Damals wusste man noch nicht, dass aus der Minimalbedingung die Maximalbedingung für Idealketten folgt, daher wurde sowohl die Minimal- als auch die Maximalbedingung gefordert.) Artin benötigte diese Theorie zum Aufbau der Arithmetik in Maximalordnungen von Algebren [Art28a]. Die Artinschen Arbeiten waren übrigens der Anlass für Hasse, die gesamte Theorie auf $\wp$-adische Grundlage zu stellen: [Has31d]. Dazu vgl. Brief vom 25. 6. 1930.

[3]Gemeint ist das Buch „Algebren und ihre Zahlentheorie“ [Dic27].

[4]Es erscheint beachtenswert, dass damals eine Studiendauer von 11 Semestern bis zur Promotion offenbar als ziemlich lang angesehen wurde – so lang, dass es Noether einer besonderen Bemerkung wert war.

[5]Wenn Noether von „meinem“ Übergang spricht, dann bezieht sie sich auf ihre Arbeit „Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie“ [Noe29]. Dort findet sich auf Seite 667 die Konstruktion des Schiefkörpers K, über dem sich ein gegebener „vollständig reduzibler zweiseitig einfacher Ring mit Einselement“ als voller Matrizenring darstellen lässt.

[6]Die Vorlesung „Algebra der hyperkomplexen Größen“ im Wintersemester 1929/30 wurde von Deuring ausgearbeitet; diese Ausarbeitung ist in die Gesammelten Abhandlungen von Emmy Noether aufgenommen worden.

[7]Offenbar bezieht sich Noether auf den Band 2 von van der Waerdens „Moderne Algebra“ [vdW31], dessen erste Auflage im Jahre 1931 erschien, und von dem Noether offenbar bereits die Druckfahnen besitzt und sie Hasse zuschickt. Allerdings stimmen die von Noether angegebenen Seitenzahlen nicht mit den Seitenzahlen des gedruckten Buches überein; wahrscheinlich trugen die Druckfahnen noch nicht die endgültigen Seitenzahlen. In der publizierten Version (1. Auflage) findet sich an der betreffenden Stelle ein Satz über die maximalen kommutativen Teilkörper von Matrizenringen über einem Schiefkörper D, u. a. dass dies genau die Zerfällungskörper von D sind. Für Zerfällungskörper kleinsten Grades war dieser Satz schon in der gemeinsamen Arbeit von Noether mit Brauer [BN27] enthalten. Nun sagt Noether, dass der Satz, den sie bei van der Waerden findet, ihr in dieser Allgemeinheit noch nicht bekannt war. – Diese Briefstelle setzt in Evidenz, was auf dem Titelblatt von van der Waerdens „Moderne Algebra“ zu lesen ist, nämlich dass dieses Buch „unter Benutzung von Vorlesungen“ von Emmy Noether entstanden war (und übrigens auch von Artin). Mehr noch: Emmy Noether hat offenbar regen Anteil an der Gestaltung des Buches genommen; wir entnehmen dieser Briefstelle, dass sie die Korrekturfahnen des van der Waerdenschen Buches sorgfältig und genau durchgesehen hat.

[8]Ob Brauer den in Rede stehenden Satz tatsächlich auf der DMV-Tagung in Königsberg im September 1930 vorgetragen hat, konnten wir nicht feststellen.

[9]Es handelt sich um die kleine Tagung über Schiefkörper, die von Hasse gemeinsam mit Emmy Noether geplant wurde und vom 26. 2.–1. 3. 1931 in Marburg stattfinden sollte. Hasse hatte

anläßlich seiner Berufung nach Marburg einige Mittel zur Durchführung einer solchen Tagung erhalten und er wünschte, alle verfügbaren Fachleute zusammenzuholen mit dem Ziel, den von ihm aufgestellten Vermutungen über Algebren über Zahlkörpern näher zu kommen. (Zu diesen Vermutungen vgl. die beiden vorangehenden Briefe vom 19. und 24. 12. 1930.) – Am 13. 1. 1931 hatte Hasse einen Vortrag vor der Mathematischen Gesellschaft Göttingen gehalten. Der Titel seines Vortrags war „Über Schiefkörper", und er stellte darin der mathematischen Öffentlichkeit seine Vermutungen über Schiefkörper und Algebren über Zahlkörpern vor, insbesondere die Vermutung, dass jeder solche Schiefkörper zyklisch ist. Sehr wahrscheinlich hatte Hasse bei dieser Gelegenheit mit Emmy Noether über die Planung des „Schiefkongresses" gesprochen.

Es erscheint eher unwahrscheinlich, dass die Anregung zu dieser Tagung auf einen Brief Emmy Noethers an Hasse aus dem Jahre 1929 zurückging, wie es Tobies in einer Anmerkung zu einem Brief Noethers an Paul Alexandroff meint. (Vgl.Tobies, „Briefe Emmy Noethers an P. S. Alexandroff" [Tob03].) In dem dort zitierten Brief Noethers vom 13. 10. 1929 an Alexandroff heißt es zwar: „*Hasse geht als Nachfolger von Hensel nach Marburg; ich schrieb ihm über zusammenhängende Gastvorlesungen, habe aber noch keine Antwort.*" Es ist aber unklar, ob mit den „zusammenhängenden Gastvorlesungen" eine Tagung wie dieser „Schiefkongress" in Marburg gemeint war. Einige Tage vor diesem Brief an Alexandroff hatte Noether in der Tat an Hasse geschrieben; vgl. den den Brief vom 7. 10. 1929. Darin gratuliert sie Hasse zunächst zu dem Ruf nach Marburg, und dann fragt sie an, ob nicht Alexandroff auf der Liste der Nachfolger Hasses in Marburg genannt werden könne. Irgendwelche Andeutungen über „zusammenhängende Gastvorlesungen" kommen jedoch in diesem Brief nicht vor. Es mag sein, dass Noether mit Alexandroff darüber gesprochen hatte, ob er eine Stelle in Deutschland annehmen würde, und dass die Bezeichnung „zusammenhängende Gastvorlesungen" ein vereinbartes Stichwort war, damit der Ausreisewunsch Alexandroffs nicht sogleich in Russland bekannt wurde. (Möglicherweise unterlag die Post einer gewissen Zensur.) Doch das ist reine Spekulation, und nach dem heutigen Kenntnisstand muss die Frage unentschieden bleiben, was Noether mit den „zusammenhängenden Gastvorlesungen" gemeint haben könnte.

In diesem Zusammenhang ist auch die folgende Briefstelle aus einem Brief Hensels an Hasse vom 21. Oktober 1929 von Interesse; dort antwortet Hensel auf Hasses Mitteilung, dass man ihm einen Fonds für Gastvorlesungen bewilligt habe:

> *. . . Dass Ihr Wunsch wegen des Fonds für Vorträge etc. so schön erfüllt ist hat mich sehr erfreut. Das könnte eine schöne Sache werden, durch die die Mathematik in Marburg und in Deutschland wirklichen grossen Gewinn haben würde. Auch ich möchte gern zum Gelingen dieses Planes ein wenig beitragen . . . Wie viel könnten wir alle von dem reichen Strom von wissenschaftlicher Anregung haben, das sich dann auf unser glückliches Marburg ergiessen würde . . .*

Insbesondere sehen wir, dass es damals keineswegs an allen deutschen Universitäten üblich war, Kolloquien mit auswärtigen Gästen zu veranstalten, so wie es heute der Fall ist. In Marburg wurden solche Kolloquien jedenfalls erst nach der Berufung Hasses eingeführt. Die eindrucksvolle Liste der Vortragenden in Marburg in den ersten Jahren nach 1930 enthält auch Emmy Noether, nicht nur beim Schiefkongress sondern auch später; vgl. den Brief vom 4. 2. 1933.

[10]Emmy Noether hatte kurz vorher einen Gastvortrag an der Universität Halle gehalten, zu dem also, wie wir erfahren, auch Herbrand aus Berlin gekommen war.

[11]Gemeint sind der Hassesche Klassenkörperbericht, Teil 2 [Has30a] sowie die Arbeiten Hasses zur Normenresttheorie, die schliesslich in die lokale Klassenkörpertheorie mündeten [Has30c]. – Wenn Noether schreibt, dass Herbrand die moderne Zahlentheorie aus den Arbeiten von Hasse gelernt hat, dann reflektiert dies die Tatsache, dass die neueren Entwicklungen der algebraischen Zahlentheorie in Frankreich damals weithin unbekannt geblieben waren. Es waren wohl im wesentlichen Herbrand, Chevalley und Weil, die nach ihren Deutschland-Aufenthalten den Anstoß gaben, sowohl persönlich als auch durch ihre Arbeiten, dass diese Aspekte bei der nächsten Generation französischer Mathematiker bekannt wurden.

[12]Siehe [Her31]. Im Programm des „Schiefkongresses" erscheint der Name Herbrand nicht, er hat also wohl nicht auf der Tagung vorgetragen – wahrscheinlich weil das Programm mit 5 Vortragsstunden täglich schon ziemlich voll war. Es erscheint uns im Hinblick auf andere Quellen nicht ausgeschlossen, dass Herbrand an dem „Schiefkongress" teilgenommen hat.

26 23.03.1931, Noether an Hasse, Postkarte

23. 3. 31

Lieber Herr Hasse!

Meinen Glückwunsch zum Vertragsschluß! Jetzt freue ich mich die Sache bald einmal im Zusammenhang zu lesen! [1]

Die Normen-Formulierung des Hauptidealproblems ist mir jetzt auch klar geworden; ich vermute daß bei konsequenter Fortentwicklung der verschränkten Produkte einmal die Lösung dastehen wird; aber nicht heute oder morgen! D.h. ich glaube man wird viel allgemeinere Fragen behandeln, dann wird es von selbst vernünftig.[2]

Ihr Beweis für den Produktsatz der Faktorensysteme enthält aber in anderer Sprache all meine Schlüsse! Statt „Automorphismenring" sagen Sie: „mit den Matrizeneinheiten vertauschbare Elemente", machen die Vorbemerkung über Invarianz (Artin, Dickson), wobei ich mich auf Operatorisomorphie berufe. Beim Nachweis daß der Rang stimmt, zählen Sie – wenn auch nicht explizit – die $e_{S,T} = e_S u_S u_T^{-1}$ (die mir nicht bekannt waren) ab, während ich die absoluten Komponenten abzähle; alles andere ist wörtlich identisch! „Anschaulichkeit" ist doch ein „Relativbegriff".[3]

Meine Adresse ist ab 26. 3: Westerland - Sylt, Villa Richard.

Bei den Galoismoduln kann man, wie Deuring mir sagte, sich auf das Zentrum des Gruppenrings beschränken; weil unter den Klassen Konjugierter das Einselement eine Klasse für sich bildet. Das ist ein Gegenstück zu der zyklischen Erzeugung der Charaktere! Deuring hat sich hier die – wahrscheinlich schwierige – Frage nach dem Analogon des Kummerschen Körpers gestellt; also Gruppe einfach, Charaktere im Grundkörper.[4]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 23.3.1931

[1] Es handelt sich um den Abschluss eines Vertrages mit dem Springer-Verlag, demzufolge Hasse (zusammen mit Hensel) eine zweibändige „Zahlentheorie" verfassen würde, wobei der erste Band eine Einführung in die algebraische Zahlentheorie auf der Grundlage der Henselschen p-adik geben sollte, während der zweite Band, darauf aufbauend, u. a. die Klassenkörpertheorie behandeln sollte. Dieser Plan wurde niemals voll verwirklicht. Der erste Band konnte erst 1938 fertiggestellt werden und erschien mit nochmaliger Verspätung im Akademie-Verlag [Has49]. Der zweite Band wurde infolge der rasanten Entwicklung der Klassenkörpertheorie niemals geschrieben; Hasse schlug später (1938) Chevalley als neuen Autor dafür vor, doch auch das wurde niemals realisiert.

[2] Es ist nicht ganz klar, was Emmy Noether hier unter „Normen-Formulierung des Hauptidealproblems" versteht. Möglicherweise bezieht sich „Hauptidealproblem" auf das Problem,

dass jedes Ideal eines Zahlkörpers im absoluten Klassenkörper zu einem Hauptideal wird. Dann ist es jedoch schwierig, nachzuvollziehen, was Noether unter „Normen-Formulierung“ versteht. Vielleicht sieht sie die Verlagerungsabbildung einer Gruppe in eine Untergruppe als eine „Norm“ an, was in der Tat eine gewisse Berechtigung hat, da diese Verlagerung durch eine Determinante definiert werden kann, genauso wie die Norm im üblichen Sinne. Wenn diese Interpretation richtig ist, dann sucht also Noether nach einem hyperkomplexen Beweis des Verlagerungssatzes. Wir bemerken dazu, dass zwar das klassenkörpertheoretische Hauptidealproblem zum Zeitpunkt des vorliegenden Briefes durch Furtwängler [Fur29] gelöst war, dass aber dessen Beweis allgemein als nicht zufriedenstellend angesehen wurde und man nach besseren Beweisen suchte. Wir zitieren dazu die Erinnerungen von Olga Taussky, publiziert in dem Buch:„Emmy Noether. A tribute to her life and her work“, ed. J. W. Brewer u. M. K. Smith [TT81]. Dort berichtet sie über ein Seminar 1931 bei Emmy Noether. Über den Furtwänglerschen Beweis heißt es:

> „*... Once the proof of Furtwängler of the Hauptidealsatz came up and Emmy repeated what almost everybody said, namely, that it was an unattractive proof.*“

Vgl. auch den Brief vom 8. 11. 1931, wo Noether von einem Seminar berichtet, an dem auch „Frl. Taussky“ teilnimmt. Dieses von Noether erwähnte zahlentheoretische Seminar ist wohl dasjenige, an das sich Olga Taussky-Todd in ihrem obengenannten Artikel erinnert. Dass Noether nach einem Beweis mit Hilfe von verschränkten Produkten sucht, kann man auch aus ihrem Brief vom 19. 12. 1930 (letzter Absatz) schliessen.

Die von vielen Seiten gesuchte Vereinfachung für den Hauptidealsatz wurde schliesslich von Iyanaga gegeben, der sich 1931/32 als Stipendiat in Hamburg aufhielt und bei Artin Vorlesungen über Klassenkörpertheorie hörte. Iyanagas Beweis wurde später in den Hamburger Abhandlungen publiziert [Iya34]. Im Vorwort zu seiner Arbeit sagt er, dass „der größere Teil der Arbeit von Artin stammt“. Durch Zassenhaus, einem Doktoranden von Artin, fand dieser Beweis Eingang in die Lehrbuchliteratur. Sein Lehrbuch [Zas37] beruhte auf Vorlesungen von Artin.

[3]Noether bezieht sich offenbar auf den von ihr in der Vorlesung gegebenen Beweis des Produktsatzes. Sind A, B einfache zentrale Algebren über einem Körper K, und werden diese durch Faktorensysteme $a_{\sigma,\tau}$ bezw. $b_{\sigma,\tau}$ dargestellt (in Bezug auf einen gemeinsamen galoisschen Zerfällungskörper $L|K$) dann wird das Tensorprodukt $A \otimes_K B$ durch das Produkt $a_{\sigma,\tau}b_{\sigma,\tau}$ der beiden Faktorensysteme dargestellt. Dieser Satz findet sich in der Ausarbeitung der Noetherschen Vorlesung, die von Deuring angefertigt wurde, die aber zu Lebzeiten Noethers nicht veröffentlicht wurde (erst 1983 wurde sie in die Gesammelten Abhandlungen [Noe83] von Emmy Noether aufgenommen). Die Ausarbeitung kursierte jedoch unter den interessierten Mathematikern. Hasse hatte davon Kenntnis, sodass sich Noether in dem Brief ohne weitere Erklärung darauf beziehen kann.

Im Frühjahr 1931 arbeitete Hasse an einem Manuskript in englischer Sprache, das er in einer amerikanischen Zeitschrift publizieren wollte (erschienen in den „Transactions of the AMS“ [Has32d]). Diese Arbeit wurde im Mai 1931 fertiggestellt und enthält eine ausführliche Darstellung der Theorie der zyklischen Algebren über einem algebraischen Zahlkörper. In dem Vorwort erläutert Hasse die Gründe, die ihn veranlassten, die Arbeit in einem amerikanischen Journal zu publizieren: „*These results do not seem to be as well known in America as they should be on account of their importance.*“ Die Arbeit enthält u. a. eine ausführliche Darstellung der Noetherschen Theorie der Faktorensysteme; Emmy Noether hatte ihr Einverständnis dazu gegeben. Offenbar hatte Hasse ihr seinen Beweis des Produktsatzes mitgeteilt und dazu gesagt, er habe ihn anschaulicher dargestellt; in dem vorliegenden Brief finden wir nun ihre Erwiderung.

[4]Deuring hat seine Ideen offenbar nicht weitergeführt (vgl.dazu aber seine Arbeit „Anwendungen der Darstellungen von Gruppen durch lineare Substitutionen auf die Galoissche Theorie“ in den Mathematischen Annalen [Deu36]). Die Frage nach einer Charakterisierung Galoisscher Körper in Verallgemeinerung der Kummerschen Theorie für abelsche Körper hat Hasse in späteren Jahren aufgenommen und in mehreren Artikeln bearbeitet. Vgl. „Invariante Kennzeichung galoisscher Körper“ [Has50a], sowie die dort angegebene Literatur. Allerdings reicht dabei das Zentrum des Gruppenringes nicht aus, wie es anscheinend Deuring in Aussicht gestellt hatte.

27 12.04.1931, Noether an Hasse, Postkarte

12. 4. 31

Lieber Herr Hasse!

Ihre Sätze habe ich mit großer Begeisterung, wie einen spannenden Roman gelesen; Sie sind wirklich weit gekommen! [1]

Jetzt (Deuring schon lange, wie mir einfällt) wünsche ich mir noch die Umkehrung: direkte hyperkomplexe Begründung der Invarianten, d.h. der Zuordnung von Zerlegungsgruppe und Gruppe der nichtkommutativen Körper zu den einzelnen Stellen; sodaß dies aus einer einzigen Zuordnung im Großen induziert wird; und damit hyperkomplexe Begründung des Reziprozitätsgesetzes! Aber das hat wohl noch gute Weile! [2] Immerhin haben Sie doch, wenn ich mich recht erinnere, in der Schiefkörper-Arbeit mit Ihren Exponenten e_p den ersten Teil schon gemacht? [3] Sind die „crossed products“ Ihre englische Erfindung? Das Wort ist gut.[4]

Ich habe mir unterdes die Führer etwas weiter überlegt; man muß die Zerlegung in Galoismoduln neben Z auch für $Z \times \overline{Z} = \sum_S e_S \overline{Z}$ anwenden: das gibt direkt die Zerlegung der Diskriminante nach den Einsdarstellungen der Untergruppen, in Übereinstimmung mit Artin. Für die allgemeine Artin-Zerlegung fehlen mir noch ein paar Hilfssätze: man kommt aber erst auf die Zerlegung in Lagrangesche Wurzelzahlen; deren Idealzerlegung muß dann den Zusammenhang mit Artin geben. Nur weiß ich über die Idealzerlegung im allgemeinen Fall noch nichts! [5]

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether

Anmerkungen zum Dokument vom 12.4.1931

[1] Gemeint ist die Arbeit Hasses über zyklische Algebren [Has32d], die er auf Englisch verfasst hatte, um sie in Amerika zu publizieren. Die Arbeit erschien 1932 in den Transactions of the American Mathematical Society und trägt das Eingangsdatum vom 29. Mai 1931. Offenbar hatte Hasse die wichtigsten Resultate dieser Arbeit an Emmy Noether geschickt. Vielleicht war es auch das Manuskript für die Vorankündigung in den Göttinger Nachrichten [Has31c]. Dort finden sich (ohne Beweise) alle wesentlichen Resultate von Hasses amerikanischer Arbeit angegeben. Vgl.auch die vorangegangene Postkarte vom 23. 3. 1931 sowie den nächsten Brief vom 2. 6. 1931.

[2] Schon ein Jahr später stellte Hasse ein Manuskript fertig, in dem er dieses Desideratum von Emmy Noether durchführen konnte. Hasse widmete die Arbeit Emmy Noether zum 50. Geburtstag am 23. März 1932; die Arbeit erschien in den Mathematischen Annalen [Has33b]. – Was Deuring betrifft, so hat er 1931 in den Göttinger Nachrichten eine Arbeit publiziert [Deu31b], in der er den sog.Vertauschungssatz für das lokale Normenrestsymbol ganz abstrakt im Rahmen der Algebrentheorie bewies, ohne Bezugnahme auf die Zahlentheorie des globalen Körpers.

[3] Gemeint ist Hasses Arbeit über $\wp$-adische Schiefkörper [Has31d] in den Mathematischen Annalen. Dort hatte Hasse bewiesen, dass für einen lokalen zentralen Schiefkörper die Verzwei-

gungsordnung e mit dem Restklassengrad f übereinstimmt, und beide sind gleich dem Schurschen Index des Schiefkörpers.

[4]Bei der Anfertigung des englischen Manuskripts hatte Hasse von dem jungen Amerikaner Engstrom Unterstützung erhalten. (Engstrom, ein Schüler von Ore in New Haven, hielt sich 1930/31 in Göttingen auf und studierte bei Emmy Noether.) Es ist uns nicht bekannt, ob die Terminologie „crossed products“ für die Noetherschen „verschränkten Produkte“ von Hasse stammt oder vielleicht von Engstrom vorgeschlagen wurde. Seit Hasses amerikanischer Arbeit hat sich diese Terminologie in der englisch-sprachigen Literatur eingebürgert.

[5]Noether bezieht sich hier wiederum auf den Brief von Artin über die heute sogenannten Artinschen Führer. Hasse hatte ihr diesen Brief zugeschickt; vgl. Noethers Brief vom 10. 10. 1930. Noether versucht offenbar, die Artinschen Führer auf dem Wege über hyperkomplexe Systeme zu gewinnen. Später, im August 1931 reicht sie eine Arbeit bei Hasse ein, in der sie die Artinschen Führer zumindest im zahm-verzweigten Fall mit ihren Methoden gewinnen kann. Vgl. Brief vom 22. 8. 1931.

---

28 02.06.1931, Noether an Hasse

Göttingen, 2. 6. 31

Lieber Herr Hasse!

Ihr Manuskript habe ich mit großer Freude gelesen; es sieht alles so selbstverständlich aus – sogar der round-about-way, so lange Ihre Definition des Normenrestsymbols nicht durch bessere ersetzt wird – daß man von dem stückweisen Finden der Beweise nichts mehr sieht.[1]

Das Interessanteste ist mir das Fundamentalresultat (17. 5.); ich glaube nach wie vor – trotz Ihres skeptischen Briefes vom April – daß hier die Grundlagen einer hyperkomplexen Begründung der Klassenkörpertheorie liegen.[2] Allerdings denke ich dabei jetzt an stärkere Hilfsmittel, nämlich einen direkten analogen Aufbau für die Idealklassen: an Stelle der Elemente bzw. Klassen (d.h. Klasse äquivalenter Darstellungen durch D, D', ...) von $A = Z \divideontimes G$ [3] würde dann das Gruppoid der Ideale und Idealklassen aus A treten; an Stelle der zugeordneten D die Gruppe der zweiseitigen Ideale bzw. Idealklassen; anstelle des Satzes vom inneren Automorphismus die Tatsache, daß zwei maximale Ordnungen (Idempotente) durch Transformation mit einem Ideal in einander übergehen usw. Dann wäre auch Ihr Einwand nicht mehr stichhaltig, daß es keinen hyperkomplexen Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes gibt; denn man könnte jeden auf der Geschlechtertheorie beruhenden Beweis als hyperkomplex bezeichnen. Im übrigen hat das gute Weile, denn gemacht ist ja nichts![4]

Fast gerade so schön finde ich übrigens Theorem 2; und hoffe sehr, daß Ihnen hier mit der Zeit der Nachweis gelingt, daß alles zyklisch erzeugbar ist. Es sieht doch sehr plausibel aus, daß es keine über dem Zentrum unverzweigte Divisionsalgebren gibt. Hat Brandt nicht vielleicht einen Beweis dafür? Ich meine mich zu erinnern, daß er einmal von diesen Fragen sprach.[5]

Nun soll ich noch das Approbatum für den mittleren Teil erteilen: ich glaube, Sie haben es fertig gebracht, die Sache den Amerikanern, und auch den Deutschen, mundgerecht zu machen, ohne zuviel von den Begriffen zu opfern.[6]

Ich habe hier noch ein paar Bemerkungen, die ich mir beim Durchlesen – zur Verwendung oder Nichtverwendung – aufgeschrieben habe:

Der Produktsatz ist besser zu formulieren:

$$\widetilde{A} = (\widetilde{a}\widetilde{b}, \widetilde{Z}); \quad \widetilde{a} = ae, \ \widetilde{b} = be.$$

Denn die Multiplikation der Faktorensysteme muß doch in einem *Körper* (etwa dem Zerfällungskörper Z oder auch in $\widetilde{Z}$) geschehen, und *nicht* im Ring $Z \times \overline{Z}$, wo $a \cdot \overline{Z}$ liegt. Zum Beweis ist nur auf S. 41 zuzufügen: $\widetilde{u}_S = u_S e = e u_S$, was längst bewiesen war; also $\widetilde{u}_S \widetilde{u}_T = \widetilde{u}_{ST} a_{S,T} \overline{b}_{S,T} = \widetilde{u}_{ST} e a_{S,T} e \overline{b}_{S,T} e = \widetilde{u}_{ST} \widetilde{a}\widetilde{b}$. (So hatte ich es auch aufgeschrieben).

Ebenso wäre wohl S. 37 zu erwähnen, daß die Ideale $(A \times \overline{A})e^S$ als konjugiert alle von *gleicher Länge*; oder *gleichem Rang*; denn erst daraus folgt ja, da die Ae^S *nicht einfach*, die Möglichkeit des Abspaltens der n^2 Matrizeneinheiten, also der Übergang zu $e(A \times \overline{A})e$ (das entspricht meiner Vorbemerkung über den Automorphismenring $e(A \times \overline{A})e$.) Der Schluß wiederholt sich in 15.

Wollen Sie nicht übrigens, da e für Idempotent, die Bezeichnung für das *Einselement* auf S. 19 ändern, oder ganz weglassen; ich glaube es wird nirgends gebraucht.

S. 40, dritte Formelzeile von unten, war ganz rechts ein e vergessen.

Das übrige sind nur ein paar Zitat-Bemerkungen:

S. IV oben; meine Vorlesung ist als 1929/30 zu zitieren; denn die verschränkten Produkte stammen ja vollständig aus 30. Bei van der Waerden II findet sich die Theorie der Zerfällungskörper, nicht aber die verschränkten Produkte.

Warum schreiben Sie S. 21 nicht: (8.7.2) $\frac{c_S^T c_T}{c_{ST}}$; entsprechend für die a S. 19: das ist doch symmetrischer in der Reihenfolge!

S. 23, zweite Zeile von oben, wird zuerst ~ 1 benutzt; es wäre gut auf die Definition I, 5 zu verweisen.

S. 28, c) wird verständlicher, wenn Sie gleich sagen daß Sie auf (10.6) hinauswollen; dieser Satz vom inneren Automorphismus ist übrigens schon beliebig oft in der Literatur bewiesen: in van der Waerden II, bei Brauer, meines Wissens auch in einer der letzten Arbeiten von Albert; ein Zitat wäre wohl richtig.

S. 32. Man kann (11.2) so formulieren, daß die Umkehrung *immer* gilt: man muß nur zufügen, daß A die Algebra *kleinsten* Grades ist, für die die Einbettung gilt; bei (11.3): „und wenn Z sich in kein A von niedrigerem Grad einbetten läßt" (irreduzible Darstellung von Z durch D). So steht es z.B. bei van der Waerden (und in meiner Vorlesung), was eventuell noch zu zitieren wäre (übrigens sind (11.2), (11.3), (11.4) zum Teil unabhängig davon, daß Ω vollkommen [ist], was Sie in Ihren Anmerkungen noch voraussetzen; wieder aus van der Waerden oder meiner Vorlesung zu entnehmen).

S. VI. Am Schluß der Anmerkung zu S. 36 wäre vielleicht später zu sagen, daß Brauer *Anwendungen* der Faktorensysteme aufs Hyperkomplexe macht, während ich die *Theorie* hyperkomplex begründe.

Das sind natürlich nur Vorschläge: Sachen, die ich gut kenne, kann ich nicht ohne Bemerkungen lesen.

Engstrom war mit Ihrem Englisch, bis auf die Umstellungen, sehr zufrieden; hoffentlich werden Sie es auch mit seinem Existenztheorem sein können! Er ist überhaupt sehr begeistert von allem was er in Deutschland gelernt hat.[7]

Ich schicke Engstroms Manuskript an Deuring der schon lange ungeduldig darauf ist; er ist für ein paar Wochen aushilfsweise bei van der Waerden[8], dessen Assistent Winter noch in Amerika ist; kommt aber zum 1. Juli wieder her. Mitte Juni will auch Herbrand kommen, der jetzt bei Artin ist.

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 2.6.1931

[1]Jetzt hatte Hasse eine Kopie des fertiggestellten Manuskript seiner amerikanischen Arbeit [Has32d] an Noether geschickt. (Vgl. die vorangegangene Postkarte vom 12. 4. 1931.) Der „round-about-way“, von dem Noether spricht, ist der Weg zur Definition des Normenrestsymbols. Zu diesem Zeitpunkt konnte Hasse das lokale Normenrestsymbol noch nicht völlig im Lokalen definieren, sondern er musste globale Konstruktionen zur Definition heranziehen. Der Beweis der fundamentalen Eigenschaften des Normenrestsymbols geschieht unter Benutzung des globalen Reziprozitätsgesetzes von Artin. Hasse selbst bezeichnet in der Arbeit diesen Weg als „round about“ und stellt die Aufgabe, eine rein lokale Definition zu finden.

[2]Das „Fundamentalresultat (17.5)“ in der amerikanischen Arbeit ist der Satz, dass die Hassesche Invariante einer lokalen Divisionsalgebra unabhängig ist von der Darstellung der Algebra als zyklisches verschränktes Produkt. Ein Jahr später, in seiner Arbeit [Has33b] zum 50. Geburtstag von Emmy Noether, greift Hasse die in dem vorliegenden Brief geäußerte Idee Noethers auf. Er sagt dort in der Einleitung: „*Emmy Noether bemerkte nun mit Recht, daß ja gerade der von mir bewiesene Invarianzsatz eine direkte, ganz im Kleinen verlaufende Definition des Normenrestsymbols liefert; sie hat damit den Schlußsatz meiner Arbeit* [8] *in einer nicht vorhergesehenen Weise widerlegt.*“ Die Arbeit [8] ist gerade die amerikanische Arbeit [Has32d] von Hasse. Der Schlußsatz in [8], den Hasse nunmehr als widerlegt betrachtet, lautete: „*Even if the theory of the norm residue symbol should, at some time, be carried far enough to avoid that round-about way, the proof of Theorem 1, in the manner here developed will be preferable, I am sure, for reasons of brevity and simplicity.*“ („Theorem 1“ besagte, dass eine zyklische Algebra über einem Zahlkörper eindeutig (bis auf Ähnlichkeit) bestimmt ist durch das System ihrer lokalen Invarianten.)

[3]Noether benutzt das Zeichen ⋇ zur Bezeichnung für ein verschränktes Produkt.

[4]Hier greift Noether wieder ihr Lieblingsthema auf, nämlich die Entwicklung einer „hyperkomplexen“ Theorie über Idealen bezw. Idealklassen; heute würden wir das als Galois-Kohomologie bezeichnen.

[5]„Theorem 2“ ist i. w. das Lokal-Global-Prinzip für zyklische Algebren. Es ist interessant zu sehen, dass Noether gerade hier einhakt und meint, daraus sollte man doch folgern können, dass jede Divisionsalgebra zyklisch erzeugbar ist – was ja einige Monate später in der gemeinsamen Arbeit Brauer-Hasse-Noether [BHN32] auch gelang. – In den Arbeiten von Heinrich Brandt haben wir keinen Beweis gefunden.

[6]Der „mittlere Teil“ der Hasseschen Arbeit [Has32d] enthält eine Darstellung der Noetherschen Theorie der Faktorensysteme. Noether hatte die Erlaubnis erteilt, dass ihre Theorie (die bislang noch nicht publiziert war) von Hasse in seine amerikanische Arbeit aufgenommen wird. Hasse hat nun die Noethersche Theorie auf seine eigene Art dargestellt, nicht ganz so abstrakt wie Noether in ihrer Vorlesung. Zwar erteilt Noether ihm dafür in dem vorliegenden Brief eine gute Note, aber man merkt an der Art ihres Kommentars, dass sie in Bezug auf diesen Teil nicht so enthusiastisch ist wie bei den anderen Teilen. Das liegt offenbar nicht nur an den folgenden kritischen Detail-Bemerkungen, sondern an der ganzen Anlage der Darstellung, die für Noether nicht abstrakt genug ist. Nur die Tatsache, dass Hasse seine Arbeit ja expressis verbis für „die

Amerikaner“ schreibt, die vielleicht mit den Noetherschen abstrakten Gedankengängen nicht so vertraut sind, versöhnt Noether mit dem Hasseschen Stil. (Und sie gibt dann ja auch zu, dass es „Deutsche“ geben mag, die ihren abstrakten Theorien vielleicht noch nicht aufgeschlossen gegenüberstehen.) – Vgl.dazu auch die Bemerkung Noethers über ihr amerikanisches Auditorium ihrer Vorlesung in Princeton, Brief vom 6. 3. 1934.

An dieser Stelle ist es vielleicht angebracht, einige Bemerkungen anzufügen über die Entstehungsgeschichte der Theorie der Faktorensysteme bei Algebren. Obwohl die hier von Noether diskutierte „amerikanische Arbeit“ von Hasse [Has32d] (erschienen 1932) die erste wurde, in der die Theorie der Faktorensysteme publiziert wurde, so ist doch die Priorität eindeutig Emmy Noether zuzuschreiben, die darüber in ihrer Vorlesung im Wintersemester 1929/30 vorgetragen hatte. Diese Vorlesung wurde von Deuring ausgearbeitet und zirkulierte unter den interessierten Mathematikern. (Die Ausarbeitung wurde später in die „Gesammelten Abhandlungen“ von Emmy Noether [Noe83] aufgenommen.) Auch Hasse hatte ein Exemplar der Ausarbeitung erhalten (zumindest eine frühe Fassung), wie aus dem Briefwechsel hervorgeht. Hasse sagt in [Has32d] ganz klar, dass die Theorie der Faktorensysteme von Emmy Noether stammt und in ihrer Vorlesung in Göttingen 1929 entwickelt worden war. Die Überschrift des Kapitels II von Hasses Arbeit lautet: „*Emmy Noether's Theory of Crossed Products.*“

In der Noetherschen Theorie handelt es sich um Faktorensysteme, die bei *Galoisschen* Zerfällungskörpern auftreten, und die sich auf die Automorphismen der Galoisgruppe beziehen. Diese nennt Noether in ihrer Vorlesung [Noe83] „kleine“ Faktorensysteme, weil sie nur von zwei Parametern abhängen (die der Galoisgruppe entstammen). Zuvor hatte Noether in ihrer Vorlesung beliebige separable Zerfällungskörper betrachtet, auch solche die nicht galoissch sind. In dieser allgemeineren Situation gibt es die „großen“ Faktorensysteme, die von drei Parametern abhängen, und die ganz entsprechend benutzt werden können, um Algebren zu beschreiben. Diese „großen“ Faktorensysteme wurden, was auch Noether zitierte, zuerst von R. Brauer 1926 in [Bra26] definiert und systematisch untersucht. In seinen darauffolgenden Arbeiten benutzte Brauer diese Faktorensysteme zum Beweis von Struktursätzen der heute so genannten Brauergruppe. In diesem allgemeineren Sinne kann gesagt werden, dass die Theorie der Faktorensysteme bei Algebren auf Richard Brauer zurückgeht.

Allerdings sind die Brauerschen Faktorensysteme „irrational“, wie es Noether [Noe33b] nennt, d.h. die Faktoren liegen nicht in dem Zerfällungskörper k sondern in seiner Galoisschen Hülle. Noether hat später einem ihrer Doktoranden, Werner Vorbeck, die Aufgabe gegeben, daraus „rationale“ Bestimmungsstücke herzuleiten, die also im Zerfällungskörper selbst (und in seinen Konjugierten) liegen. Die zugehörige Dissertation [Vor35] wurde jedoch nicht mehr abgeschlossen, bevor Noether aus Göttingen vertrieben wurde. (Offiziell hat Vorbeck 1934 bei F. K. Schmidt promoviert, wobei Emmy Noether noch von Bryn Mawr aus ihr Gutachten über die Dissertation schickte.) Die Vorbecksche Dissertation ist niemals publiziert worden und hat auf die spätere Entwicklung keinen Einfluss gehabt.

Insbesondere unter dem Aspekt der Kohomologietheorie bevorzugt man heute meistens die handlicheren Noetherschen „kleinen“ Faktorensysteme, so wie es Noether vorgeschlagen hatte.

Unabhängig von der durch Brauer und Noether gestarteten Entwicklung in Europa, entstanden auch in den USA in der Umgebung von Dickson Ansätze zur Theorie der Faktorensysteme. In der deutschen Ausgabe [Dic27] (in Abschnitt 34) betrachtet Dickson Divisionsalgebren (und allgemeiner einfache Algebren), die einen *galoisschen* maximalen Teilkörper enthalten; es wird gezeigt, dass sich solche Algebren als verschränktes Produkt darstellen lassen. Allerdings setzt Dickson nicht voraus, dass die Algebren assoziativ sind. Es fehlen also die Noetherschen Assoziativrelationen; lediglich im Falle von Galoisgruppen sehr spezieller Bauart (zwei Erzeugende) werden explizite Bedingungen aufgestellt, welche die Assoziativität der Algebra widerspiegeln. In [Dic28] berichtet Dickson, dass er für beliebige *auflösbare* Galoisgruppen solche Bedingung aufstellen könne, und das wird ausgeführt am Beispiel von Gruppen der Ordnung pq. Wir können davon ausgehen, dass diese Resultate von Dickson in Deutschland bekannt waren. (Hasse hatte das Buch [Dic27] für das „Jahrbuch“ kritisch referiert, ebenfalls auch die Arbeit [Dic28].) Später hat der Dickson-Schüler Albert in der Arbeit [Alb31c] gezeigt, dass jede einfache Algebra ähnlich ist (im Sinne der Brauergruppe) zu einem verschränkten Produkt. Hierbei arbeitet Albert von vornherein nur mit assoziativen Algebren. Da für diese die Gültigkeit der Assoziativrelationen trivial ist, so fehlt auch hier die Erwähnung der Assoziativrelationen. Die Frage der Konstruktion von Algebren mit Hilfe von Faktorensystemen wird in [Alb31c] nicht behandelt.

Immerhin sind diese Passagen aus den Arbeiten von Dickson und Albert als erste Ansätze in Richtung einer allgemeinen Theorie der Faktorensysteme bei Algebren anzusehen. Albert erklärt diese Situation aus seiner Sicht in einem Brief vom 26. 11. 1931 an Hasse:

> „*I cannot quite see what you mean about the theory of crossed products. Did not Dickson really first consider them? As to the general associativity conditions I obtained them in 1929 from my matrix representation of any „normal division algebra of type R“ in my paper „The structure of pure Riemann matrices with non–commutative multiplication algebras“. The matrix representation (of any crossed product) is on page 31 (section 7) of the Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (vol.55,1931) reprint which I sent you. I never published the associativity conditions but they are immediate consequences of the matrix representations. I showed them to Professor Dickson in July 1929 when the above paper was completed but he did not think them important enough to be published.*“

Hiernach ging es auf Dickson zurück, dass die Theorie der Faktorensysteme bei Algebren in den USA zunächst nicht weiter verfolgt wurde. Zwar hat Dickson die zyklischen Algebren entdeckt und diese durch die Normfaktorgruppe beschrieben. Aber der Schritt von der Normfaktorgruppe zyklischer Erweiterungen zur zweiten Kohomologiegruppe beliebiger galoisscher Erweiterungen wurde von Dickson nicht gemacht, er wurde von Emmy Noether initiiert. Siehe dazu Noethers eigene Äußerung im Brief vom 12. 11. 1931, und auch die dortige Anmerkung 3. Siehe auch die Anmerkung 1 zum Brief vom 19. 12. 1930.

Beachte, dass in den genannten Jahren, also 1928-30, die Noethersche Theorie der Faktorensysteme in USA offenbar noch nicht allgemein bekannt war; dies änderte sich erst mit der Arbeit [Has32d], die in den „Transactions of the American Mathematical Society“ erschien (und übrigens von Albert für die Transactions referiert worden war).

Wie wir aus den Lebenserinnerungen von Mac Lane [ML05] erfahren, hat Albert die oben beschriebene Situation auch ihm (Mac Lane) geschildert. Mac Lane schreibt:

> „*Dickson's student, A. Adrian Albert, once told me that he had generalized Dickson's cyclic algebras by replacing the cyclic group with an arbitrary finite group, thus essentially defining the crossed product algebras. However, on Dickson's advice, he did not publish the idea, so the crossed product algebras were first defined in Germany...*“

Und Mac Lane nennt für „Germany“ die Namen von Helmut Hasse, Richard Brauer und Emmy Noether.

[7]Wie bereits früher gesagt, hatte Engstrom die Hassesche Arbeit sprachlich durchgesehen und korrigiert. Vgl.Brief vom 12. 4. 1931. Das in Rede stehende Existenztheorem benötigt man in dem Beweis, dass jede Algebra zyklisch ist. Das Theorem lautet: *Sind endlich viele Stellen eines Zahlkörpers K vorgegeben, und zu jeder dieser Stellen $\mathfrak{p}$ eine natürliche Zahl $n_\mathfrak{p}$, dann gibt es stets eine zyklische Erweiterung $L|K$, deren Grad n das kleinste gemeinsame Vielfache der $n_\mathfrak{p}$ ist, und deren lokaler Grad an jeder der vorgegebenen Stellen $\mathfrak{p}$ ein Vielfaches von $n_\mathfrak{p}$ ist.* Hasse hatte sich offenbar einen Beweis dieses Theorems zurechtgelegt, und er hatte Engstrom vorgeschlagen, den Beweis auszuführen. Engstrom hat das zugesagt, aber dann doch nicht durchgeführt. Der Satz wurde später in verallgemeinerter Form von Grunwald (Doktorand von Hasse) bewiesen. Zwar entdeckte Wang (Doktorand von Artin) im Jahre 1948 einen Fehler im Grunwaldschen Satz; aber der Hassesche Existenzsatz in der obigen, ursprünglichen Form ist davon nicht betroffen. Vgl. dazu auch [Roq04a].

[8]Van der Waerden war damals Ordinarius an der Universität Leipzig.

29 22.08.1931, Noether an Hasse, Postkarte

Rantum auf Sylt, 22. 8. 31 (bis Ende August)

Lieber Herr Hasse!

Hier mein Henselbeitrag! Ich habe doch etwas anderes genommen, als ich ursprünglich vorhatte, damit Sie und Hensel das Vergnügen von etwas $\mathfrak{P}$-adik haben.[1] – Die Anmerkungen sind sehr unvollständig; denn Literatur gibt es in Rantum nicht. Vielleicht haben Sie einen Crelle Assistenten, der die fehlenden Seitenzahlen ausfüllen kann, sonst ich bei der Korrektur.Und dann soll er bei Anmerkung 3, Ihrer Schiefkörperarbeit, ein geschwungenes $\wp$ machen, ich weiss nicht, wie man das schreibt![2]

Mich interessiert an der Sache, dass man im einfachsten Spezialfall die Schwierigkeiten sieht, die ein direkter Aufbau der Führertheorie macht.[3] Denn genau bis zu dieser Stelle bin ich auch allgemein gekommen. Übrigens habe ich bei Satz 7 die Zerlegung etwas allgemeiner angewandt, als es im Zahlbericht steht (dort Diskr[iminante] nur durch *eine* Primzahl teilbar) und muß erst kontrollieren, ob es wie ich vermute, stimmt, sonst schränke ich bei der Korrektur die Voraussetzung ein.[4]

Kommen Sie nach Elster? Ich habe vor nach alter Gewohnheit hinzukommen; und Sie gehören doch auch zu den Regelmäßigen.[5] Engstrom scheint ja mit Gottes und F. K. Schmidts Hilfe auch voranzukommen![6]

Deuring hat unterdes bewiesen, daß von den beiden Vermutungen, Riemannscher und Gauss'scher – zu vorgegebener Klassenzahl gibt es nur endlich viele imaginär quadratische Körper – mindestens eine richtig ist; aber welche weiß er nicht.[7]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 22.8.1931

[1] Noether schickt ihr Manuskript für den Festband des Crelleschen Journals, der aus Anlass des 70. Geburtstages von Kurt Hensel herauskommen soll. Der Geburtstag ist am 29. Dezember 1931; zu diesem Datum soll also der Festband fertiggestellt und dem Jubilar übergeben werden. Als Termin zur Abgabe der Beiträge wurde der 1. September 1931 festgesetzt. Offenbar um diesen Termin einzuhalten, hat Noether ihren August-Urlaub auf der Nordseeinsel Sylt dazu benutzt, das Manuskript niederzuschreiben. Wie aus ihren Bemerkungen hervorgeht, ist das Manuskript noch nicht ganz fertig für den Druck; es müssen noch einige redaktionelle Arbeiten durchgeführt werden. – Das Thema dieser Arbeit [Noe32b] ist die Existenz von lokalen Ganzheits-Normalbasen bei Körpern ohne höhere Verzweigung; dadurch wurde diese Arbeit weithin bekannt. Bemerkenswert ist, dass Noether in dieser Arbeit mit den Henselschen lokalen Methoden arbeitet. Offenbar hat sie sich unter dem Einfluss von Hasse, der in [Has31d] lokale Algebren beschrieben hatte, mit den Henselschen lokalen Methoden angefreundet und ihre Bedeutung erkannt – ganz im Gegensatz zu ihren anderen Arbeiten, in denen sie die Dedekindsche Tradition der Idealtheorie fortführt. Offenbar hat Hasse diese Besonderheit der vorliegenden Arbeit Emmy Noethers erkannt. In seiner Ansprache an Hensel an dessen Geburtstag [Has32b], bei der Übergabe des Festbandes des Crelleschen Journals, führte Hasse aus:

> „... *Insbesondere mögen Sie es als ein ganz besonderes und erfreuliches Zeichen für die Kraft und die Bedeutung Ihrer p-adischen Methoden ansehen, dass selbst Emmy Noether, die reinste Fortführerin der alten Dedekindschen Tradition, in diesem Bande eine völlig mit Ihren p-adischen Methoden arbeitende Abhandlung vorlegt* ... “

Die Noethersche Arbeit enthält auch den wahrscheinlich ersten Beweis der Existenz von Normalbasen für eine beliebige Galoissche Körpererweiterung (nicht notwendig Ganzheits-Normalbasen); allerdings nur für unendlichen Grundkörper.

[2]Noether bezieht sich auf die Arbeit von Hasse über $\wp$-adische Schiefkörper in den Mathematischen Annalen 1931 [Has31d]. Noether verwendet aus dieser Arbeit den Satz, dass jedes Links/Rechts-Ideal einer lokalen Maximalordnung einer einfachen Algebra ein Links/Rechts-Hauptideal ist.

[3]Die Motivation Noethers für diese Arbeit war nicht allein die Existenz von Normalbasen, sondern ein algebrentheoretischer Zugang zur Theorie der Artinschen Führer. Noether war durch Hasse über die Artinsche Führertheorie informiert worden (vgl.Noethers Brief vom 10. 10. 1930). Noether kann jedoch hier nur den Fall einer *zahm verzweigten* Galois-Erweiterung behandeln; in diesem Fall gibt nämlich der Satz von der Ganzheits-Normalbasis eine einfache Aussage über die modultheoretische Struktur des Ringes der ganzen Elemente der Körpererweiterung: er ist als Galois-Modul isomorph zum ganzzahligen Gruppenring. Diese Isomorphie wird benutzt, um mit Hilfe der Zerlegung der Gruppendeterminante gewisse „Führerideale“ zu definieren. Noether kann jedoch nicht allgemein zeigen, dass diese Ideale wirklich die Artinschen Führer sind; ihr gelingt das nur im Falle einer zahm verzweigten zyklischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ von Primzahlgrad durch Bezugnahme auf Hilbert (Zahlbericht). Erst viel später, 1983, konnte Fröhlich zeigen, dass die Noethersche Definition tatsächlich mit den Artinschen Führern übereinstimmt: [Frö83].

[4]Es stellte sich dann heraus, dass das nicht nötig war. Im endgültigen Text erklärt Noether in einer Fußnote, dass in ihrem Falle die Hilbertschen Voraussetzungen gemildert werden können.

[5]Im September 1931 fand die Jahrestagung der DMV in Bad Elster statt. Hasse kam nach Bad Elster zusammen mit seinem Freund Harold Davenport, mit dem er zuvor eine längere Autotour durch Europa gemacht hatte.

[6]Es handelt sich um den Versuch Engstroms, den ihm von Hasse genannten Existenzsatz zu beweisen. Vgl.Brief vom 2. 6. 1931.

[7]Deuring hat darüber 1932 auf dem Internationalen Mathematiker Kongress in Zürich vorgetragen und erregte mit diesem Resultat einiges Aufsehen. Seine Arbeit erschien in der Mathematischen Zeitschrift [Deu33].

---

30 24.08.1931, Noether an Hasse, Postkarte

Rantum(Sylt), 24. 8. 31

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihren Brief! Natürlich kann ich Ihre Frage auch nicht beantworten – ich glaube man muß so etwas liegen lassen bis man von anderer Seite selbst darauf stößt – aber da Sie neue Ideen dazu haben wollen, sind Ihnen vielleicht Bemerkungen von Levitzki nützlich. Levitzki konstruiert, ausgehend von den Matrizeneinheiten c_{ik}, direkt „vollständig zerfallende verschränkte Produkte“ mit zyklischer Gruppe. Und da man vermutlich, wenn die Sache sich überhaupt direkt angreifen läßt, die Spuren-Normalform mit den Faktorensystemen in Verbindung bringen muß, kann diese Normalform bequem sein. Es ist die folgende: Sei gesetzt:

$$d = c_{12} + c_{23} + ... + c_{n1}; \quad e_i = c_{ii};$$

dann wird die Basis des Matrizenrings gegeben durch: $e_i d^\lambda$ $(\lambda = 0, \ldots, n-1)$. Aus den Relationen für Matrizeneinheiten folgen die weiteren:

$$e_i d = d e_{i+1}; \qquad d^n = 1;$$

setzt man also:[1] $Z = e_1 \mathsf{P} + \ldots + e_n \mathsf{P}$; $G = \{d, d^2, \ldots, d^{n-1}, 1\}$, so handelt es sich um das verschränkte zerfallende Produkt: $Z \divideontimes G$, wo jetzt die zyklische Gruppe G die Vertauschungen der Komponenten von Z erzeugt (solche Produkte sind ja in Ihrer amerikanischen Arbeit, bei teilweisem Zerfallen, auch vorgekommen).

Man kann entsprechend *jede* Gruppe G realisieren: Seien die Matrizeneinheiten mit $c_{S,T}$ bezeichnet, wo S, T unabhängig G durchlaufen; sei wieder $c_{S,S} = e_S$ gesetzt. Setzt man $d_T = \sum_{S \in G} c_{S,ST}$, so ergeben die d_T eine Realisation (mit Faktorensystem Eins), und der Matrizenring wird wieder gleich $Z \divideontimes G$; also mit $e_S d_T$ als Basis. – Ob Sie das zu neuen Ansätzen führt, weiß ich natürlich nicht.[2]

Levitzki hat allgemeiner solche „normalen Produkte“ betrachtet, wo die beiden Faktoren hyperkomplexe Systeme A und B; und nur Vertauschungsregeln statthaben: $ab = ba'$, wo a' mit a in A. Das kann für die Frage der Erweiterung von Gruppen wichtig werden.[3]

Eine andere Bemerkung ist die, ob man nicht direkt nach der Minkowskischen Methode zeigen kann, daß bei Schiefkörpern die Diskriminante nach dem Zentrum immer ungleich Eins sein muß. Es wird doch hier alles so viel einfacher, daß mir die Gültigkeit auch bei algebraischem Zentrum – durch Normbildung – nicht ausgeschlossen scheint. Wenigstens bei rationalem Zentrum sollte man das doch einmal versuchen. Das Heranziehen der unendlich fernen Stellen neben den endlichen scheint doch an sich plausibel![4]

In bezug auf diophantische Gleichungen werde ich Ihnen und anderen Interessenten in Elster eine Arbeit von Korselt unterbreiten: er hat mir auch in einem Brief seine Methode auseinandergesetzt, und Blumenthal wünscht „wohlwollende Begutachtung“; aber meine Weisheit reicht doch nicht aus. Vielleicht ist er auch selber da; es handelt sich um drei binäre Formen.[5]

Mir geht der Tod von Herbrand nicht aus dem Sinn. Haben Sie gehört, daß er Ende Juli bei einer Besteigung in den französischen Alpen verunglückt ist? Sein Vater hat mir heute Genaueres geschrieben.[6]

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether

Anmerkungen zum Dokument vom 24.8.1931

[1]Wie bei Noether üblich bedeutet P den Grundkörper.

[2]Wir wissen nicht, welche Frage Hasse gestellt hatte. Da aber die Antwort Noethers ein Verfahren zur Konstruktion zyklischer zerfallender Produkte nennt, so ist anzunehmen, dass sich Hasse nunmehr mit einem Beweis des Lokal-Global-Prinzips für Algebren auseinandersetzt. Diese Annahme wird gestützt durch einen Brief, den Hasse kurz zuvor, nämlich am 27. Juli 1931, an Richard Brauer geschrieben hatte. Darin heißt es:

„*Ich möchte Ihnen gerne schreiben, wie die Sachlage mit der einzigen noch offenen Frage nach der Zyklizität aller normalen einfachen Algebren steht. Ich glaube nämlich, daß diese Frage jetzt angriffsreif ist, und möchte Ihnen die mir vorschwebende Angriffslinie vorlegen. . .*“

Weiter schreibt Hasse, es sei leicht, zu gegebener normalen einfachen Algebra A einen zyklischen Körper zu konstruieren, der an allen Primstellen $\mathfrak{p}$ ein Zerfällungskörper von $A_{\mathfrak{p}}$ wird. Dadurch wird das Problem zurückgeführt auf das Lokal-Global-Prinzip für Algebren über Zahlkörpern. Hasse skizziert einen Weg, wie man dies vielleicht unter Zuhilfenahme seines früher bewiesenen Lokal-Global-Prinzips für quadratische Formen beweisen könnte. Ist a_i eine Basis der betrachteten Algebra A, so definiert die Spurenmatrix $\mathrm{sp}(a_i a_k)$ eine quadratische Form. Wenn A an jeder Stelle $\mathfrak{p}$ des Grundkörpers zerfällt, so gibt es für jedes $\mathfrak{p}$ eine Basistransformation, welche die vorgegebene Basis in ein System von Matrizeneinheiten transformiert, und dies bewirkt eine gewisse Transformation der quadratischen Form. Nach dem Lokal-Global-Prinzip für quadratische Formen gibt es dann auch eine entsprechende Transformation der quadratischen Form über dem gegebenen Grundkörper. Hasse fragt nun, ob und wie man an der speziellen Struktur dieser transformierten Spurform erkennen kann, dass die gegebene Algebra zerfällt. M. a. W., man hat dann daraus eine Basis von Matrizeneinheiten über dem gegebenen Grundkörper zu konstruieren. Hasse weiß jedoch noch nicht, wie diese Konstruktion zustande gebracht werden könne und schreibt an Brauer:

„*Ich möchte diese Sache zur Überprüfung nach diesem Gesichtspunkt in Ihre Hände legen.*“

Da es auch im vorliegenden Noether-Brief um Konstruktion von Basen und Spurformen geht, so gehen wir wohl nicht fehl, wenn wir annehmen, dass Hasse einen entsprechenden Brief an Noether geschrieben hatte und wir nunmehr ihre Antwort darauf vor uns haben. – Was Brauer betrifft, so antwortete er am 3. 8. 1931. Zu Hasses Frage könne er zur Zeit nichts sagen und müsse sich erst einarbeiten. Im Vertrauen auf Hasses eigene Schaffenskraft fügte er jedoch hinzu:

„*Ich hoffe, wenigstens so weit zu sein, dass ich alles verstehen kann, wenn Sie selbst die Lücke ausgefüllt haben werden.*“

[3] Levitzki hatte 1929 bei Noether promoviert; seine Dissertation wurde in der Mathematischen Zeitschrift publiziert [Lev31b]. Die Arbeit über normale Produkte, auf die sich Noether hier bezieht, erschien in den Annals of Mathematics [Lev32].

[4] Die „Minkowskische Methode“ bedeutet, wenn wir Noether richtig interpretieren, die Anwendung des Minkowskischen Satzes über Gitterpunkte in konvexen Körpern auf die Abschätzung der Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers. Dabei ist der Grundkörper der rationale Zahlkörper. Im vorliegenden Falle handelt es sich um Schiefkörper. Selbst wenn es gelänge, die „Minkowskische Methode“ auf Schiefkörper auszudehnen, wäre damit nichts gewonnen, denn es handelt sich hier ja nicht (wie bei Minkowski) um die absolute Diskriminante des Schiefkörpers (also über $\mathbb{Q}$), sondern um die Relativdiskriminante in Bezug auf sein Zentrum. Es müsste also noch ein Vergleich der absoluten Diskriminante des Schiefkörpers mit der Diskriminante des Zentrums hinzukommen. Offensichtlich sieht Noether diese Schwierigkeit, wenn sie schreibt, dass man das „wenigstens bei rationalem Zentrum doch einmal versuchen“ sollte. Vgl.dazu die Anmerkungen in den folgenden Briefen, den „Siegelschen Beweis“ betreffend.

Immerhin ist zu berichten, dass es zum Zeitpunkt der Abfassung dieses Briefes bereits Methoden aus der *analytischen* Zahlentheorie der Schiefkörper gab, aus denen das genannte Resultat über die Diskriminante hätte abgelesen werden können. Wir meinen die Dissertation [Hey29] von Käte Hey (1927) bei Artin in Hamburg. Dort wurde die Zetafunktion eines Schiefkörpers über einem Zahlkörper definiert. Der Vergleich dieser Zetafunktion mit der Zetafunktion des Zentrums, insbesondere ihrer Pole und Nullstellen, ergibt in der Tat, dass der Schiefkörper, wenn er nicht trivial ist, mindestens eine (sogar mindestens zwei) Verzweigungsstellen besitzen muss – dabei werden die unendlichen Stellen mit in die Betrachtung einbezogen. Allerdings wurde dies in der Dissertation von Käte Hey nicht explizit ausgesprochen. Außerdem gab es in der Dissertation Fehler, die jedoch von Zorn in den Hamburger Abhandlungen [Zor33] berichtigt werden konnten. Erst durch die genannte Note von Zorn wurde es klar, dass die Ergebnisse von Hey-Zorn das Lokal-Global-Prinzip für Algebren implizieren. Es ist merkwürdig, dass das nicht schon vorher bemerkt worden war. Die Dissertation von Hey war bei den interessierten Mathematikern durchaus bekannt, obwohl sie niemals in einer mathematischen Zeitschrift publiziert worden war. Sie wurde als selbständige Publikation gedruckt, wie es damals für eine Dissertation vorgeschrieben war, und die gedruckten Exemplare wurden versandt. Zur Dissertation Hey vgl. den Artikel von Lorenz [Lor05].

[5] Von A. Korselt erschien 1936 in den Mathematischen Annalen (Bd. 112) eine Arbeit [Kor36] Korselts, in welcher er für eine numerisch gegebene elliptische Kurve ein Erzeugendensystem der rationalen Punkte bestimmt. Es ist möglich, dass es sich dabei um eine Neufassung des hier

vorliegenden Manuskripts handelt, doch haben wir das nicht entscheiden können. – Korselt war Lehrer an einem Realgymnasium und hatte im Jahre 1904 bei O. Hölder in Leipzig promoviert. Im Hasse-Nachlass gibt es 14 Briefe von Korselt an Hasse aus den Jahren 1928-1931.

[6] Jacques Herbrand hatte als Rockefeller-Stipendiat in den Jahren 1930/31 in Deutschland studiert, sowohl bei Emmy Noether in Göttingen, als auch bei Artin in Hamburg und Hasse in Marburg, sowie bei John von Neumann in Berlin. Ursprünglich hatte er sich mit mathematischer Logik beschäftigt, dann aber auch mit algebraischer Zahlentheorie und Klassenkörpertheorie, die er vornehmlich aus dem Klassenkörperbericht von Hasse gelernt hatte. (Siehe den Brief Noethers vom 8. 2. 1931.) Er hat wesentliche Beiträge zur Entwicklung der lokalen und globalen Klassenkörpertheorie geleistet. Alle Äußerungen über Herbrand von Emmy Noether, Artin und Hasse zeigen, dass er wegen seiner Leistungen, aber auch wegen seines freundlichen und aufgeschlossenen Wesens sehr geschätzt wurde. Sein plötzlicher Bergsteiger-Tod hat große Bestürzung ausgelöst, wie wir es hier auch aus dem Brief von Emmy Noether entnehmen können. – Übrigens war Hasse bereits unmittelbar nach Herbrands Tod darüber von unterrichtet worden. Es gibt einen Brief von André Weil an Hasse vom 4. 8. 1931, in dem es heißt:

„*Sehr geehrter Herr Professor! Ich muss Ihnen leider eine sehr betrübende Nachricht mitteilen, die des Todes Jacques Herbrands, der vor wenigen Tagen bei einer Bergbesteigung im Dauphiné tödlich verunglückt ist. Ich brauche Ihnen nicht zu sagen, welchen Verlust dieser Tod für die Wissenschaft und besonders für die Zahlentheorie bedeutet. . .*“

---

31 04.10.1931, Noether an Hasse

Göttingen, 4. 10. 31

Lieber Herr Hasse!

Ich schicke Ihnen noch eine Anmerkung zu meiner Hensel-Note, mit der Bitte sie an die Druckerei weitergeben zu lassen da sie mir für die Fahnenkorrektur reichlich lang ist.

Das Deuringsche Beispiel scheint mir sehr instruktiv zu sein; es zeigt deutlich die Grenzen des formal Hyperkomplexen – Artin hatte die Vermutung ausgesprochen, daß aus einer Darstellung der Diskriminante als Gruppendeterminante alle Sätze seiner Arbeit folgen würden, was also wörtlich genommen nicht stimmt.[1]

Im allgemeinen Fall, wo keine Gruppendeterm[inante] existieren kann – denn die Führeraufspaltung hängt von der Anordnung der Kompositionsreihe ab, die körpertheoretisch bestimmt ist – zeigt sich das Zusammenspielen von formal Hyperkomplexem und Zahlentheoretischem noch deutlicher; die Galoismoduln müssen mit Trägheits- und Verzweigungskörper und -Gruppen verknüpft werden. Über erste Ansätze bin ich aber noch nicht hinaus.[2]

Aus dem einen Hauptsatz meiner Note – Operatorisomorphie von K/k, aufgefaßt als Galoismodul, mit dem Gruppenring über k – aus dem ich schon die Speisersche Lösung des Kleinschen Formenproblems[3] gefolgert hatte, hat Deuring eine weitere sehr interessante Folgerung gezogen: der Operatorisomorphismus gibt eine explizite Darstellung der zwischen Untergruppen und Zwischenkörpern bestehenden Beziehung (Hauptsatz der Galoisschen Theorie, der dadurch zugleich neu bewiesen ist). Und zwar entsprechen den Zwischenkörpern gerade diejenigen

Ideale des Gruppenrings, die die Einsdarstellung der zugehörigen Gruppe induzieren – genauer jeweils das umfassendste solche Ideal. Ich vermute daß das auch zahlentheoretisch noch von Bedeutung wird! [4]

Schicken Sie mir einmal den Siegel-Beweis für die Diskriminanten nichtkomm[utativer] Körper? Oder hat er wirklich nur bewiesen, daß für $n > 1$ auch $n^{n^2} > 1$? [5]

Beste Grüße,
Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 4.10.1931

[1] Das Deuringsche Beispiel wurde von Noether als Fußnote in ihre Hensel-Note [Noe32b] aufgenommen. Deuring konstruiert eine nicht-maximale Ordnung, deren Diskriminante sich als Quadrat der Gruppendeterminante darstellen lässt.

[2] Heute ist es bei vielen Fragestellungen selbstverständlich, dass bei der arithmetischen Untersuchung von Galois-Moduln die Wirkung der Trägheits- und Verzweigungsgruppen eine besondere Rolle spielt. Es erscheint interessant, dass Noether dies bereits 1931 explizit ausspricht.

[3] Der von Noether angesprochene „eine Hauptsatz" ihrer Note ist nichts anderes als die Existenz einer Normalbasis für Galoissche Erweiterungen. Das impliziert insbesondere, dass K als k-Galoismodul die reguläre Darstellung der Galoisgruppe G über k erzeugt; also gibt es zu jeder k-irreduziblen Darstellung von G einen zugehörigen G-Teilmodul innerhalb K (jedenfalls wenn die Charakteristik nicht die Gruppenordnung teilt). Das ist i.W. die „Speisersche Lösung des Kleinschen Formenproblems", die Noether hier anspricht, vgl. [Spe16].

[4] In der Deuringschen Arbeit, die Emmy Noether hier zitiert, wird ein allgemeingültiger algebrentheoretischer Beweis für die Existenz einer Normalbasis gegeben, der sowohl für endlichen wie auch unendlichen Grundkörper gilt. (Der von Noether in ihrer Hensel-Note [Noe32b] angegebene Beweis gilt nur bei unendlichem Grundkörper.) Übrigens ergibt sich daraus auch ein allgemeingültiger Beweis des Satzes vom primitiven Element. Diese Arbeit [Deu32] von Deuring erschien in den Mathematischen Annalen mit dem Eingangsdatum vom 17. 12. 1931.

[5] Es gibt eine undatierte Postkarte von Siegel an Hasse, mit Poststempel vom Juni 1931 (Tag nicht erkennbar), die folgendermaßen beginnt: „*Lieber Herr Hasse, ich überlegte mir heute morgen auf der Heimreise noch einmal Ihre Frage wegen der Diskriminante der Schiefkörper...*" Es scheint demnach, dass Siegel zu Besuch bei Hasse in Marburg gewesen war, und dass ihn Hasse dort wegen der Diskriminante von Schiefkörpern angesprochen hatte. Siegel stellt auf der Postkarte einen Beweis dar, dass die Diskriminante eines Schiefkörpers D, genommen über dem rationalen Zahlkörper $\mathbb{Q}$, stets vom Betrag > 1 ist, dass also, falls $\mathbb{Q}$ das Zentrum von D ist, stets eine verzweigte Stelle vorliegt. Wäre der Beweis richtig, dann würde er das Lokal-Global-Prinzip für zentrale Schiefkörper über dem Grundkörper $\mathbb{Q}$ implizieren. In der damaligen Zeit beschäftigte sich Hasse sehr damit, das Lokal-Global-Prinzip für beliebige zentrale einfache Algebren über beliebigen Zahlkörpern zu beweisen. (Vgl. den vorangegangenen Brief vom 24. 8. 1931; dort hatte auch Noether solche Diskriminantenabschätzungen ins Auge gefasst.)

Siegel selbst scheint Zweifel an der Richtigkeit seines Beweises gehabt zu haben, denn am Schluss seiner Postkarte schreibt er: „*Wo liegt der Fehler?*" Es ist nicht bekannt, wie Hasse darauf reagiert hat, aber es scheint, dass er den Siegelschen Beweis nicht akzeptierte. Denn in seinem nächsten Brief an Hasse vom 6. 7. 1931 schreibt Siegel: „*Was die Diskriminante betrifft, so habe ich offenbar nicht die richtige Definition der Diskriminante zugrunde gelegt. Würden Sie mir gelegentlich mitteilen, wie Sie sie definieren?*" Und weiter: „*Es ist schade, dass Ihnen für die Durchführung Ihrer schönen Idee nicht geholfen ist.*"

32 23.10.1931, Noether an Hasse, Postkarte

23. 10. 31

Lieber Herr Hasse!

Ich schicke Ihnen jetzt die Hensel-Korrektur, mit etwas schlechtem Gewissen über meine vielen Korrekturen.[1]

Aber ich habe rascher publiziert als ich gewohnt bin; und außerdem war das an der See geschriebene Manuskript nicht allzu leserlich. An dem $[G]_{\mathfrak{op}}$ statt $[G]_{\mathfrak{o}_\mathfrak{p}}$ bin ich aber unschuldig; das läßt sich doch wohl ändern? Wird (§3 Anfang) meine Korrektur T^{-1} statt $T-1$ verständlich sein? Sonst erläutern Sie bitte noch!

Die Widmung dürfen Sie noch mit „Herrn" oder „Geheimrat" ergänzen, wenn Sie es für nötig halten; ich persönlich ziehe die Art des Mathematikers vor. „Gordan ist mehr", sagte Gordan einmal.[2]

Vielen Dank für die Mühe, die Sie sich mit dem Siegel-Beweis gemacht haben; ich habe aber auch nichts herausgebracht, obwohl ich versucht habe mit Faktorensystemen und Zerfällungskörpern zu verbinden. Die Größenordnung ist eben bei direkter Anwendung von Minkowski falsch, sobald die absolut irreduziblen Darstellungen von höherem als erstem Grad![3]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 23.10.31

[1] Mit Hensel-Korrektur ist die Korrektur der Hensel-Note [Noe32b] gemeint, also der Arbeit über Ganzheits-Normalbasen, die Noether zur Publikation in dem Hensel-Festband des Crelleschen Journals geschickt hatte. Vgl. die vorangegangenen Briefe.

[2] Es geht um den Text der Widmung für Hensel. In dem Einladungsschreiben, das Hasse an eine Reihe von Mathematikern geschickt hatte mit der Aufforderung, für diesen Festband einen Beitrag zu liefern, hieß es: „*Jeder einzelne Beitrag soll mit einem Vermerk der Art: „Herrn Geheimrat Hensel zum 70. Geburtstag gewidmet" versehen sein.*" Das war offenbar der Anlass für Emmy Noether, darüber nachzudenken, ob der Titel „Geheimrat" in der Widmung angemessen sei. Bei der endgültigen Publikation ist man davon abgekommen, jeden einzelnen Artikel mit einer Widmung zu versehen. Stattdessen findet sich am Anfang des Bandes, nach der Titelseite, der folgende Widmungstext: „*Kurt Hensel, dem Herausgeber dieses Journals seit 1902 widmen Schüler, Freunde und Kollegen die in diesem Bande vereinigten Arbeiten zum 70. Geburtstag am 29. Dezember 1931.*" Wir sehen, dass in diesem Text weder „Herr" noch „Geheimrat" vorkommt; offenbar hatte sich Hasse die Meinung von Emmy Noether zu eigen gemacht, dass die Weglassung dieser Attribute mehr bedeuten würde. – Dass Noether an dieser Stelle Gordan zitiert, erklärt sich dadurch, dass Gordan in Erlangen ihr „Doktorvater" gewesen war (im Jahre 1907).

[3] Zum „Siegel-Beweis" vgl. die Anmerkungen zum vorangegangenen Brief vom 4. 10. Offenbar hatte sich Hasse die Mühe gemacht, den Siegelschen Beweis genauer zu analysieren und herausbekommen, dass er grundsätzlich nicht weiterführt. Denn Siegel schreibt ungefähr zur gleichen

Zeit, nämlich am 21. 10. 1931 folgendes: „*Vielen Dank für die Darstellung meines missglückten Beweises!*“ Bei dieser Gelegenheit ist es vielleicht von Interesse, einen weiteren Brief von Siegel zu zitieren, den dieser zwei Monate später, am 11. 12. 1931, geschrieben hat, nachdem ihn Hasse über den Erfolg bei dem Beweis des Lokal-Global-Prinzips ohne explizite Diskriminantenabschätzung unterrichtet hatte. Siegel schrieb:

„*Lieber Herr Hasse! Für die freundliche Übersendung des Correcturabzugs sage ich Ihnen meinen besten Dank. Das ist in der Tat das schönste Geburtstagsgeschenk für Hensel, dass seinen p-adischen Methoden ein solcher Triumph beschieden wurde... Der Pessimismus, den ich den Aussichten der Mathematik gegenüber im Allgemeinen empfinde, ist wieder einmal wankend geworden...*“

Übrigens hatte auch Siegel ein „Geburtstagsgeschenk“ für Hensel geliefert, in Form eines Beitrages für den Hensel-Festband. Der Siegelsche Beitrag hat den Titel: „Über die Perioden elliptischer Funktionen“ und ist die einzige Arbeit von Siegel im Crelleschen Journal.

---

33 27.10.1931, Noether an Hasse, Postkarte

27. 10. 31

Lieber Herr Hasse!

Meinen Glückwunsch zur Zyklizität! [1] Ich vermute, daß man für den allgemeinen Fall neben den Assoziativbedingungen auch noch das Analogon zum verschränkten Produkt bei nicht-Galoisschen Zerfällungskörper kommen muß; denn die Invariantenkörper L der zyklischen Untergruppen sind doch „teilweise“ Zerfällungskörper.[2] Das hat nur bis jetzt niemand durchführen wollen! [3] Dabei fällt mir ein, ob ich nicht eigentlich in Anmerkung 1) zitiert gehöre; denn Sie stützen sich doch in der amerikan[ischen] Arbeit auf meine bisher nur dort publizierten Sätze. Also weiter viel Erfolg! [4]

Darf ich Sie noch um folgende Zufügung zu Anmerkung 9) meiner Note[5] bitten (da ich in 8) auch von abstrakten Körpern rede): Ist k von Charakteristik p, wo p in n aufgeht, so handelt es sich um irreduzible Kompositionsfaktoren in einer Kompositionsreihe nach Galoismoduln.

Beim Beweis von Satz 1. muß es genauer heißen: „Bei Festhaltung von $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ als Grundbereich“ (oder Koeffizientenbereich). [Denn die Diskriminante hat den Wert eins inbezug auf die Stelle im *rationalen* Zahlkörper, also auch wenn $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ *nicht* maximale Ordnung, also $[G]_{\mathfrak{o}_\mathfrak{p}}$ nicht maximal]. Ich hätte eigentlich mit $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ maximal anfangen sollen! Man verlangt stillschweigend, (d.h. es ist beweisbar) im Hyperkomplexen maximal nach dem *rationalen* Grundkörper; im Kommutativen, wo man „ganz abgeschlossen“ sagt, sieht man es gleich. – Daß $K_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}$ direkte Summe von Körpern, folgt doch daraus, daß die Idempotente u[nd] Komponenten bei der direkten Summenzerlegung von $\mathfrak{O}/p^i$ nach den $\mathfrak{p}$-adischen Idempotenten und Komponenten konvergieren; daran hatte ich (vor Satz 5) gedacht!

Herzl. Grüße, Ihre E.N.

Anmerkungen zum Dokument vom 27.10.1931

[1]Hiernach hatte Hasse an Noether ein Manuskript über „Zyklizität" geschickt. Das Manuskript ist uns nicht bekannt, und auch aus der Noetherschen Antwort geht nicht unmittelbar hervor, worum es sich handelt. Wir wissen jedoch aus anderen Quellen, dass sich darin ein Beweis dafür fand, dass jede *abelsch darstellbare* einfache Algebra A zyklisch ist – alles über einem algebraischen Zahlkörper als Zentrum.

An dieser Stelle erscheint es notwendig, die von Hasse verwendete Terminologie zu klären. A heißt „zyklisch", wenn A isomorph ist zu einem zyklischen verschränkten Produkt. A heißt „zyklisch darstellbar", wenn A ähnlich ist zu einem zyklischen verschränkten Produkt, wobei Ähnlichkeit im Sinne der Brauerschen Gruppe zu verstehen ist. Zyklische Darstellbarkeit bedeutet, dass A einen zyklischen Zerfällungskörper besitzt. Entsprechend für „abelsch" oder „auflösbar" statt „zyklisch". Über einem algebraischen Zahlkörper als Grundkörper fallen die Begriffe „zyklisch" und „zyklisch darstellbar" zusammen, aber das folgt erst aus dem Lokal-Global-Prinzip für Algebren. Solange dies noch nicht bewiesen ist, hält Hasse die beiden Begriffe auseinander.

Das zur Diskussion stehende Manuskript war ein Schritt zu dem angestrebten endgültigen Ziel, nämlich dem Nachweis, dass *jede* einfache Algebra über einem Zahlkörper zyklisch ist. Das Manuskript war offenbar schon für die Publikation gedacht, denn Noether möchte darin zitiert werden, wie wir aus dieser Postkarte erfahren.

[2]Verschränkte Produkte bei nicht-galoisschen Zerfällungskörpern gehen auf Brauer [Bra26] zurück. Emmy Noether hatte diese in ihrer Vorlesung 1929/30 [Noe83] behandelt. Hasse hatte eine Kopie der (von Deuring angefertigten) Vorlesungsausarbeitung erhalten, war also mit der Theorie der nicht-Galoisschen Faktorensysteme vertraut, sodass Noether hier keine näheren Erläuterungen abgeben musste.

[3] Hasse ist tatsächlich der Noetherschen Anregung gefolgt und hat versucht, die Theorie der nicht-Galoisschen Faktorensysteme zu benutzen, um zu einem Beweis des Lokal-Global-Prinzips und damit der Zyklizität für *jede* einfache Algebra über einem Zahlkörper zu gelangen. Dies geht aus einem Brief von Hasse an Brauer vom 7. 11. 1931 hervor. Zu jenem Zeitpunkt hatte Hasse bereits von Brauer die Sylow-Argumente übernommen und konnte sich daher auf den Fall beschränken, dass die in Rede stehende Algebra einen galoisschen Zerfällungskörper von Primzahlpotenzgrad besitzt. Er schrieb nun an Brauer, dass er hoffe, dass die Sache sich

> „*damit zum glücklichen Ende führen läßt, und zwar wohl wesentlich mit den von Ihnen entwickelten Sätzen über Faktorensysteme nicht-galoisscher Zerfällungskörper.*"

Wir ersehen daraus, dass Hasse die Noethersche Anregung aufgenommen hatte. Der Brief hat 8 Seiten, und Hasse schildert darin ausführlich, was er bislang herausbekommen hatte und wie er sich den Rest des Beweis vorstellt, ohne allerdings zu einem Abschluss zu kommen.

Zwar erwies sich schon zwei Tage später, dass dieser Aufwand garnicht notwendig war, sondern dass es nach Noether eine einfache und fast triviale Schlussweise gibt (vgl. dazu den nächsten Brief Noethers vom 8. 11. 1931 und die darauffolgende Postkarte vom 10. 11. 1931, sowie die folgenden Briefe und unsere Kommentare dazu). Hasse erläutert das in einer Postkarte vom 9. 11. 1931 an Brauer, die er seinem oben erwähnten Brief eilig nachschickte:

> „*Man muß nur den Abbau nicht, wie ich ungeschickt versuchte, beim Körper unten, bei der Gruppe oben beginnen, sondern umgekehrt. Ich habe mich furchtbar gequält, und doch nicht den einfachen Gedanken von Emmy gehabt.*"

In einem späteren Brief an Richard Brauer vom 16. 11. 1931 spricht Hasse noch einmal von seinem ursprünglichen Beweis, und dass er sich dazu in einer „*geradezu labyrinthischen Weise gequält habe*" und fügt gleichzeitig hinzu, dass er „*übrigens bei Eintreffen der E. Noetherschen Karte im Wesentlichen durchgekommen war!*"

Offenbar hat Hasse auch in einem Brief an Albert von seinem ursprünglichen Beweis gesprochen und davon, dass er dazu mit den Brauerschen Faktorensystemen bei nicht-galoisschen Zerfällungskörpern gearbeitet hatte. Das lag insofern nahe, als der von Hasse damals verwendete Ansatz, nämlich „bei der Gruppe oben zu beginnen", genau derselbe war wie bei Dickson [Dic28], und Hasse also annehmen konnte, dass Albert damit vertraut war. Im Hinblick auf seine „*labyrinthischen*" Probleme, die er dabei zu überwinden hatte, hatte er wohl an Albert geschrieben, dass er die Brauerschen Faktorensysteme als „*obscure*" empfinde. Wir haben zwar keinen Beleg dafür, denn die Briefe von Hasse an Albert sind nicht erhalten. Immerhin würde diese Interpretation,

die ja naheliegt, eine Briefstelle von Albert an Hasse im Brief vom 26. 11. 1931 erklären, in der es heißt:

> „*As to Brauer's „obscure" conception of factorsystems, I do not believe them so obscure. In my paper „The structure of matrices with any normal division algebra of multiplications", Annals of Math. vol.32(1931) pp.131–148 I obtained a sort of a generalization of some of I.Schur's work which led both for Brauer (very early) and myself later and independently to the theory of factor systems. I still believe this important.*"

Wir haben diesen Brief von Albert bereits in unserer Anmerkung 6 zu Noethers Brief vom 2. 6. 1931 zitiert.

Bemerkung: In [FS05] wird die in Rede stehende Briefstelle aus dem Brief von Albert als „*gem*" bezeichnet mit der Begründung, dass es sich hier um eine Meinungsverschiedenheit („*disagreement*") zwischen Albert und Hasse handele. Unter Berücksichtigung der Korrespondenz Hasse-Noether und der oben zitierten Briefe Hasse-Brauer können wir uns dieser Meinung nicht anschließen. Offensichtlich handelt es sich um eine gegenseitige Information über die jeweiligen Erfahrungen bei der Arbeit mit einem mathematischen Konzept, und dies kann nicht ohne weiteres als „Meinungsverschiedenheit" angesehen werden.

[4] Da wir das Hassesche Manuskript nicht kennen, so wissen wir auch nicht genau, was in der Anmerkung 1) stand. Anscheinend enthielt die Anmerkung einen Verweis auf die, von Noether angesprochene, amerikanische Arbeit [Has32d] von Hasse. Dort findet sich, mit Noethers Genehmigung, die erste Publikation der Noetherschen Theorie der verschränkten Produkte.

[5] „Meine Note" bedeutet die „Hensel-Note" [Noe32b], von der in den vorangegangenen Briefen die Rede war. Sämtliche von Noether hier gewünschten Änderungen sind in der publizierten Version berücksichtigt worden.

---

34 08.11.1931, Noether an Hasse

Göttingen, 8. 11. 31

Lieber Herr Hasse!

Besten Dank für Ihre Karte! Beiliegend Trivialisierung und Verallgemeinerung Ihrer Resultate.[1]

Ich dachte schon ob Sie das nicht auch als *Anhang zu Ihrer Note* bringen könnten; denn tatsächlich handelt es sich nur um Ihre Schlüsse – der Reduktionssatz steht implizit in Ihrer letzten Karte mit der Bemerkung, daß das Faktorensystem inbezug auf jeden einer zyklischen Untergruppe entsprechenden Ausschnitt äquivalent 1 – und doch kommt dabei heraus, daß auch jede auflösbare Algebra zyklisch.[2] Sie dürfen übrigens beliebig umstilisieren; und die Bezeichnungen noch stärker an Ihre angleichen; auch einen Einleitungs- bezw. Überleitungssatz zufügen. Mir ist auch getrennte Publikation recht; aber dann wird es wohl nicht ins Henselheft kommen können?

Mir scheint jetzt daß man für den allgemeinen Fall außer den nichtgaloisschen Faktorensystemen auch noch neue *zahlentheoretische* Sätze braucht. Bestimmtes kann man natürlich nicht vorhersagen. Was mich mehr interessiert, ist die Frage der hyperkomplexen Bedeutung des ursprünglichen Hilbert-Furtwänglerschen Beweises; aber das heißt natürlich ein ganzes Stück Klassenkörpertheorie umzudeuten![3]

In diesem Zusammenhang möchte ich Sie um ein Korrekturexemplar der amerikanischen Arbeit bitten falls schon eines existiert![4] Ich mache jetzt ein zahlentheoreti-

sches Seminar: Klassenkörpertheorie im Kleinen, Artinsche Führer, Hauptidealsatz (Frl. Taussky ist ja hier), u.s.w.; es sollen die vorliegenden Beweise vorgetragen werden, aber mein persönliches Ziel ist die Sachen dabei hyperkomplex zu verstehen.[5] Daß ich aus Ihrem Beweis für die abelschen Algebren die Diskussion der Assoziativitätsbedingungen hinausgeworfen habe, kann ja auch für den Beweis des Hauptidealsatzes noch Bedeutung bekommen![6]

Für den dem Zentralblatt zuzufügenden „Bericht über neuere Fortschritte“ (oder so ähnlich) hat Deuring den hyperkomplexen übernommen, etwa 80–100 Seiten; es soll bis Ende Mai abgeschlossen sein, wie es dann mit Erscheinen steht weiß ich nicht. Jedenfalls soll alles Neue mit hinein![7]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anlage zum Brief Noether an Hasse vom 08. 11. 31.[8]

Reduktionssatz für Zerfällungskörper.

Es handelt sich um einfache Algebren A, D mit Zentrum k, wo k algebraischer Zahlkörper; unter (A) wird die Klasse aller zu A ähnlichen verstanden, d.h. aller mit demselben Automorphismenkörper (derselben zugeordneten Divisionsalgebra).

Reduktionssatz: *Ist (D) überall zerfallend – d.h. an jeder Stelle voller Matrizenring – $K|k$ Zerfällungskörper von (D) und L Zwischenkörper derart, dass $K|L$ zyklisch von Primzahlgrad, so ist auch $L|k$ Zerfällungskörper.*

Bemerkung. An zahlentheoretischen Hilfsmitteln wird zum Beweis nur der Hilbert-Furtwänglersche Normensatz für Primzahlgrad benutzt; der Hassesche Normensatz ergibt sich als Folgerung.

Beweis. Sei Λ zu L isomorph; mit (D) ist auch (D_Λ) überall zerfallend. Aber (D_Λ) besitzt zyklischen Zerfällungskörper $\mathsf{K}|\Lambda$ von Primzahlgrad; also folgt – nach Hilbertschem Normensatz – $(D_\Lambda) = (\Lambda)$, also L Zerfällungskörper (denn überall zerfallend heißt hier $u_S^\ell = a$ mit a Norm an jeder Stelle, also auch Norm eines Elements aus Λ, also $(D_\Lambda) = (\Lambda)$).

Folgerung 1. *Ist (D) überall zerfallend und besitzt auflösbaren Zerfällungskörper $K|k$, so wird $(D) = (k)$ also voller Matrizenring,* m.a.W. *ist (D) auflösbare Klasse und ist das Faktorensystem an jeder Stelle assoziiert* 1*, so absolut assoziiert* 1*.*

Denn ist $K, L_1, L_2, \dots L_{s-1}$ eine Kompositionsreihe von Zwischenkörpern derart, dass $L_{i+1}|L_i$ zyklisch von Primzahlgrad, so ergibt der Reduktionssatz wiederholt angewandt die Behauptung.

Spezialfall der Folgerung. Wenn $Z|k$ zyklisch, so *Normensatz von Hasse* (ist a an jeder Stelle Norm, so absolut).

Folgerung 2. *Ist (A) auflösbare Klasse und ist $(A) \neq (k)$, so verzweigt, d.h. die Diskriminante nach Zentrum $\neq 1$.* (Andere Fassung von Folgerung 1; unter Beachtung, dass unverzweigt gleich überall zerfallend nach Hasse, Schiefkörper).

Folgerung 3. *Besitzt* (A) *auflösbaren Zerfällungskörper, so auch zyklischen, also auflösbare Klasse ist zyklisch.* Folgt vermöge der Reduktion von Hasse direkt aus Folgerung 1, unter Beachtung, dass ein auflösbarer Körper $K|k$ auch auflösbar über Z bleibt, wo Z zyklischer Zwischenkörper.

Folgerung 4. *Die Frage, ob jede Klasse* (A) *zyklisch ist, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob für jede Klasse* (A) *minimaler Zerfällungskörper existiert, der galoissch.*

Beweis. 1. Wenn zyklischer Zerfällungskörper existiert, so auch minimaler, der zyklisch, also galoissch. Dabei ist unter „minimaler" nur verstanden, dass kein echter Teilkörper Zerfällungskörper (im zyklischen Falle gibt es aber dann nach Hasse auch einen in den Automorphismenkörper einbettbaren). – 2. Wenn *alle* (A) minimale Zerfällungskörper besitzen, die galoissch, so auch die überall zerfallenden (D), dann aber notwendig $(D) = (k)$. Denn sei im Gegenteil $K \neq k$ minimaler Zerfällungskörper und Galoissch; sei $K|L$ zyklisch von Primzahlgrad und also L echter Teilkörper. Dann auch L Zerfällungskörper nach Reduktionssatz; also K *nicht* minimal. Widerspruch. Also jedes (A) zyklisch nach Folgerung 3.

Folgerung 5. *Ist* (D) *überall zerfallend, so sind neben einem Zerfällungskörper* K *auch alle solchen Unterkörper* T *Zerfällungskörper für die* $K|T$ *auflösbar ist* (wie Folgerung 1 zu beweisen).

Anmerkungen zum Dokument vom 8.11.1931

[1]Noether bezieht sich hier auf Hasses Manuskript, in welchem nachgewiesen wird, dass alle *abelsch darstellbaren* Algebren über Zahlkörpern zyklisch sind. Hasse hatte ihr dieses Manuskript geschickt, wie aus dem vorangehenden Brief vom 27. 10. 1931 hervorgeht. Noether schickt nun ihrerseits ein Manuskript, in dem die Hasseschen Schlussweisen sehr vereinfacht werden, und zwar so stark, dass Noether von „Trivialisierung" spricht. Dabei stellt sich heraus, dass – mit dieser Vereinfachung – das Hassesche Resultat auf auflösbar darstellbare statt nur abelsch darstellbare verallgemeinert wird. Da Hasse vorhatte, sein Manuskript in dem Hensel-Festband zu publizieren, so schlägt Noether vor, dass ihr Manuskript als „Anhang" in das Hassesche Manuskript aufgenommen wird, denn sonst käme es wohl nicht mehr in den Hensel-Festband. – Diese Publikationspläne wurden jedoch schon am nächsten Tag gegenstandslos, weil Hasse die Noethersche Schlussweise mit der ihm von Brauer mitgeteilten Sylow-Methode verbinden konnte und somit der Hauptsatz gefunden wurde, dass *jede* einfache zentrale Algebra über einem Zahlkörper zyklisch ist. Hasse hat dann in aller Eile sein Manuskript gegen das neue, das gemeinsam mit Brauer und Noether zustande kam, ausgetauscht. Siehe dazu die folgende Postkarte vom 10. 11. 1931 und unsere Anmerkung 6 dazu.

[2]Noether benutzt eine etwas andere Terminologie als Hasse; bei ihr bedeutet „auflösbare Algebra" das, was Hasse als „auflösbar darstellbare Algebra" bezeichnet. Vgl. die Anmerkung 1 zum vorangehenden Brief vom 27. 10. 1931.

[3]Der „Hilbert-Furtwänglersche Satz" bezieht sich auf zyklische Zahlkörper-Erweiterungen von Primzahlgrad und besagt, dass eine Zahl des Grundkörpers dann und nur dann eine Norm des Erweiterungskörpers ist, wenn sie lokale Norm an jeder Primstelle (einschließlich der unendlichen Primstellen) ist. Dieser Satz wurde bereits von Hasse – auf Anregung von Emmy Noether – algebrentheoretisch umgedeutet (d.h. „hyperkomplex" in der Noetherschen Terminologie) , nämlich als Lokal-Global Prinzip für zyklische Algebren von Primzahlindex. Nunmehr möchte Noether nicht nur den Satz, sondern auch seinen *Beweis* algebrentheoretisch umdeuten. Der ursprüngliche Beweis von Furtwängler, der auch in dem Hasseschen Klassenkörperbericht (Teil II) [Has30a] dargestellt ist, benutzt analytische Eigenschaften der Dedekindschen Zetafunktion. Die „algebrentheoretische Umdeutung" im Noetherschen Sinne soll wohl insbesondere beinhalten,

dass der Beweis ohne analytische Hilfsmittel durchgeführt wird, also rein algebraisch. Noether versucht also jetzt zum Kern der Dinge vorzudringen.

[4]Die amerikanische Arbeit Hasses, die von Albert referiert worden war, erschien mit Verzögerung erst 1932 in den Transactions AMS [Has32d]. Damals war es üblich, Korrekturexemplare sozusagen als „Preprints“ an interessierte Kollegen zu verschicken. Zur vorliegenden Arbeit in den Transactions hatte allerdings Hasse die Korrekturexemplare niemals bekommen, wahrscheinlich infolge eines organisatorischen Fehlers der Redaktion. (Daher musste im selben Band der Transactions noch eine gesonderte „Additional Note“ erscheinen mit den umfangreichen Korrekturen von Hasse.)

[5]Vgl. die Anmerkung 2 zu der Postkarte vom 23. 3. 1931.

[6]Noether bezieht sich hier wieder auf ihre „Trivialisierung und Verallgemeinerung“ der Hasseschen Resultate. Wenn sie schreibt, dass sie aus Hasses Beweis die Diskussion der Assoziativitätsbedingungen hinausgeworfen habe, so lässt das auf die Struktur des ursprünglichen Hasseschen Beweises schliessen, obwohl wir diesen Beweis nicht kennen – er wurde ja durch die Ereignisse, die in den nächsten Briefen zutage treten, überholt. Nach Noethers Worten ist anzunehmen, dass in Hasses Beweis die Assoziativitätsbedingungen für Faktorsysteme explizit diskutiert wurden. Wir beziehen uns nun auf die Anmerkung 2 zur Postkarte vom 24. 8. 1931; anscheinend hatte Hasse im Falle eines *abelschen* Zerfällungskörpers den dort skizzierten Ansatz durchführen können. Mit Hilfe des Lokal-Global-Prinzips für quadratische Formen hat er aus einer gewissen Basis ein Faktorensystem destillieren können, von dem er nun nachweisen konnte, dass es zerfällt. All das ist nun unnötig geworden im Hinblick auf Noethers „Trivialisierung und Verallgemeinerung“.

[7]Es handelt sich um die Publikationsreihe „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete“, die soeben vom Springer-Verlag eingerichtet worden war und von der Schriftleitung des (ebenfalls soeben gegründeten) Zentralblatts für Mathematik herausgegeben wurde. Diese Reihe sollte die früher von der DMV herausgegebenen Berichte (zu denen z.Bsp. der Hilbertsche Zahlbericht [Hil97] und der Hassesche Klassenkörperbericht [Has30a] gehörte) ersetzen. Emmy Noether war aufgefordert worden, dafür einen Band über „Hyperkomplexe Systeme“ zu schreiben. Sie hat das jedoch nicht übernommen, sondern schlug Max Deuring, ihren „besten Schüler“, dafür vor. Deuring, damals 24 Jahre alt, lieferte dann den bekannten Ergebnis-Band [Deu35a], den er jedoch „Algebren“ betitelte, womit er sich der damals modernen Terminologie anschloss. Dieser Band gilt als einer der herausragenden Ergebnis-Bände der Reihe.

Wie aus dem Archiv des Springer-Verlages ersichtlich, wurde der Vertrag über Deurings Buch mit dem Springer-Verlag am 19. 9. 1931 abgeschlossen. Vertraglich vorgesehen waren, wie auch Noether schreibt, zunächst 5 Druckbogen, also 80 Seiten. Weder dies, noch der Zeitlimit „bis Ende Mai 1932“ wurde jedoch eingehalten. Als Deuring schließlich am 27. 10. 1934 das Manuskript ablieferte, hatte es den Umfang von 10 Druckbogen. Beides, die Zeitüberschreitung und die Umfangsüberschreitung, wurde schließlich von Ferdinand Springer genehmigt, nicht zuletzt aufgrund der eindringlichen Fürsprache von Emmy Noether, die sich noch von Bryn Mawr aus dafür einsetzte.

Als Kuriosität sei bemerkt, dass zur selben Zeit wie Deuring (also 1931) A. A. Albert in Chicago aufgefordert wurde, ebenfalls einen Ergebnis-Band über Algebren zu schreiben. Albert sagte zu, erhielt jedoch einige Monate später von Neugebauer (damals Schriftleiter des Zentralblatts) eine Absage mit der Begründung, er (Neugebauer) habe nicht gewusst, dass „Algebren“ und „hyperkomplexe Systeme“ dasselbe seien, und Deuring habe ja nun schon das Thema „hyperkomplexe Systeme“ übernommen.

[8]Diese Anlage war mit Schreibmaschine geschrieben, war also wahrscheinlich dazu bestimmt, direkt der Hasseschen Note als Anhang hinzugefügt zu werden, so wie es Noether in ihrem Brief vorgeschlagen hat. Die Verallgemeinerung gegenüber dem Hasseschen Resultat besteht darin, dass jetzt auflösbar dargestellte Algebren als zyklisch nachgewiesen werden, während Hasse das nur für abelsch dargestellte Algebren bewiesen hatte. Wenn Noether sagt, es handelt sich außer der Verallgemeinerung um eine *Trivialisierung*, so ist das unmittelbar ersichtlich. Es werden nur triviale Schlussweisen benutzt, ausgehend von dem (allerdings nicht trivialen) Reduktionssatz von Hasse, der auf der Takagischen Klassenkörpertheorie fußt. Offenbar hatte Hasse diesen einfachen Induktionsschluss nicht gesehen. Vgl. den letzten Satz in Noethers Brief vom 22. 11. 1931.

35 10.11.1931, Noether an Hasse, Postkarte

10. 11. 31

Lieber Herr Hasse!

Das ist schön! Und mir ganz unerwartet[1], so trivial der letzte Schluß ist; der ja auch bei Brauer steht (Jede Primzahl des Index geht im Exponenten auf).[2] Ich dachte man müßte arithmetische Schlüsse der Art heranziehen, daß die Zerlegungsgruppen eines Primideals auflösbar. Folgerung 5, die ich nicht für allzu wichtig hielt, gibt also jetzt den allgemeinen Satz! [3]

Meine Trivialisierung habe ich mir übrigens bei der Lektüre der neuen Brauer-Arbeiten für Crelle überlegt, wovon er mir Durchschlag schickte (heute vor acht Tagen).[4]

Noch etwas! Die Brauersche Reduktion auf Index von Primzahlpotenzgrad ist garnicht nötig: Sei N/K Zerfällungskörper, p eine im Index aufgehende Primzahl; L Invariantenkörper der zugehörigen Sylowgruppe; und (D) überall zerfallend. Dann ist (Reduktionssatz) auch L Zerfällungskörper; aber nicht mehr durch p teilbar. Widerspruch! [5]

Den Manuskript-Entwurf werde ich Ihnen sehr rasch wieder zugehen lassen; auch die Korrektur können wir rasch jeder unabhängig erledigen.[6] Ihr amerikanisches Manuskript ist *nicht eilig*![7]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 10.11.1931

[1]Nunmehr war der Durchbruch gekommen. Hasse hatte an Noether geschrieben, dass er jetzt den vollen Beweis für die Zyklizität *aller* einfachen Algebren über Zahlkörpern führen könne. Er benutzte dabei einerseits das Induktions-Argument, das Noether ihm in ihrem vorangegangenen Brief vom 8. 11., zwei Tage zuvor, mitgeteilt hatte, und andererseits ein Sylow-Argument, das ihm Richard Brauer vor einigen Tagen, mit Brief vom 29. 10. 1931, geschrieben hatte (im Zusammenhang mit der Frage ob Exponent und Index übereinstimmen). Die Zusammenfügung dieser beiden Schlussweisen ergab die Lösung des lange gesuchten Problems, zusammen mit dem Hasseschen Reduktionssatz, der alles auf den Beweis des Lokal-Global-Prinzips für Algebren reduzierte. Noch im vorangegangenen Brief hatte Noether gemeint, dass man zum Beweis die nicht-galoisschen Faktorensysteme brauchen würde und, wie sie schrieb, neue zahlentheoretische Sätze. All dies hat sich nunmehr als unnötig erwiesen. Dadurch erklärt sich, weshalb ihr diese Wendung „ganz unerwartet“ kam.

[2]Der in Rede stehende Satz von Brauer findet sich in seiner Arbeit „Über Systeme hyperkomplexer Zahlen“ [Bra29]. Natürlich meint Noether nicht, dass der Satz von Brauer trivial ist, sondern ihr erscheint die *Anwendung* dieses Satzes in der vorliegenden Situaion trivial. Aus dieser Bemerkung Noethers scheint hervorzugehen, dass dieser Satz von Brauer in derjenigen

Fassung des Hasseschen Beweises, die er jetzt an Noether geschickt hatte, benutzt wurde. (In der gedruckten Fassung wird er nicht mehr benutzt.)

[3]Hier bezieht sich Emmy Noether auf die Anlage zu ihrem vorangegangenen Brief, und auf die dort am Schluss formulierte „Folgerung 5".

[4]Wie bereits in Fußnote 1 erwähnt, hatte Brauer am 29. 10. 1931 an Hasse geschrieben. Zusammen mit seinem Brief schickte er zwei Manuskripte zur Publikation im Crelleschen Journal, bei dem ja Hasse als Herausgeber fungierte. Aus der Bemerkung von Noether geht hervor, dass Brauer ihr Kopien seiner Manuskripte geschickt hatte – und dass sie diese sofort gelesen hat. Daran anschliessend hatte sie sich ihr Reduktionsverfahren auf den auflösbaren Fall überlegt – was sie „Trivialisierung" nennt, und dies dann Hasse geschickt. Hasse hat dann beide Ideen – Brauers und Noethers – zusammengefügt und damit den Beweis vervollständigt. – Brauers Arbeiten sind 1932 im Crelleschen Journal erschienen, eine in Band 166 [Bra32a], die andere in Band 168 [Bra32b]. (Band 167 war der Hensel-Festband; der war offenbar schon voll besetzt, insbesondere da Hasse das gemeinsame Manuskript (mit Brauer und Noether) darin noch eilig unterbringen wollte.)

[5]Bei der „Brauerschen Reduktion auf Primzahlpotenzgrad" handelt es sich um den folgenden Satz: *Eine zentrale Divisionsalgebra vom Index m ist Produkt von zentralen Divisionsalgebren von Primzahlpotenzindex $p_i^{r_i}$, entsprechend der Zerlegung $m = \prod_i p_i^{r_i}$.* Dieser Satz findet sich in derselben Arbeit [Bra29], die wir schon in Anmerkung 2 zitiert haben. Aus der Noetherschen Bemerkung geht hervor, dass dieser Satz in der ursprünglichen Fassung des Hasseschen Manuskripts noch benutzt wurde. Hier zeigt Noether, dass er überflüssig ist. Das wird bestätigt durch einen Brief Hasses an Brauer vom 11.11.1931, in welchem Hasse mitteilt, dass Noether „*Ihren* [Brauers] *Satz von der direkten Aufspaltung als überflüssig herausschmiß.*" In der gedruckten Fassung findet sich die Noethersche Schlussweise.

[6]Hieraus entnehmen wir, dass Hasse schon einen Manuskript-Entwurf mitgeschickt und eine gemeinsame Publikation (gemeinsam auch mit Brauer) vorgeschlagen hatte. Noether sollte den Entwurf durchsehen und ihn danach rasch wieder an Hasse zurücksenden. Die Eile erklärt sich dadurch, dass Hasse diese Arbeit gerne in den Jubiläumsband von Kurt Hensel aufnehmen wollte. Hensel war Hasses akademischer Lehrer gewesen und jetzt sein „väterlicher Freund". Und Hasse hatte ja schon sein früheres Manuskript zur Publikation im Hensel-Festband vorgesehen (siehe den vorangegangenen Brief vom 8.11.1931). Jenes andere Manuskript war nun obsolet geworden und musste durch das neue ausgetauscht werden. Da der Jubiläumsband schon Ende Dezember zum Geburtstag Hensels gedruckt vorliegen sollte, war höchste Eile geboten.

Dass die Sache sehr eilte, ersieht man auch aus dem folgenden Passus des Briefes von Hasse an Brauer, vom 11. 11. 1931. Hasse schickte einen Entwurf des Manuskripts der gemeinsamen Arbeit und schrieb dazu:

> „*Ich bitte Sie, die beiliegenden Blätter einer liebevollen und wenn irgend möglich recht schnellen Durchsicht zu unterziehen. Denn wie Sie sehen, habe ich die Gelegenheit benutzt, um eine ehrfurchtsvolle Verbeugung zu Hensels 70. Geburtstag zu machen, und der ist bereits am 29. Dezember. Wir bringen ein Festheft bei Crelle heraus (fast 2 Bände stark) und da soll dies nach Möglichkeit noch hinein. Da tut dann Eile sehr not.*"

Das neue Manuskript mit dem Hauptsatz erschien dann im Hensel-Festband noch im gleichen Jahr [BHN32].

[7]Vgl. die Anmerkung 4 zum vorangegangenen Brief vom 8. 11. 1931.

36 12.11.1931, Noether an Hasse

Göttingen, 12. 11. 31

Lieber Herr Hasse!

Das ist jetzt sehr schön, und äußerst bequem für uns daß wir keine Mühe mit dem Text hatten! Ich meine aber, Sie sollten in einer Fußnote angeben, daß *Sie* den Text redigiert haben – wenn man auch Ihren Stil erkennt; schon deshalb weil wir andern in den Fußnoten eine „Verbeugung“ bekommen, und Sie nicht![1] Das müssen Sie aber bei Albert abschwächen; er hat, Satz 19, nur für den Fall *zyklischer* Algebren gezeigt daß jeder Primteiler des Index im Exponenten aufgeht; von der allgemeinen Brauerschen Reduktion kann *ich* wenigstens nichts finden.[2]

Dann hätte ich gern noch ein paar genauere „historische“ Angaben. Sie benutzen nämlich bei der Reduktion II neben Brauer ganz wesentlich *meinen* prinzipiellen Schluß des Abbaus von oben: Ist K/Λ auflösbar, D überall zerfallend, so auch Λ Zerfällungskörper – d.h. meine Folgerung 5. Es wäre also gut, Seite 2 *vor* Reduktion 2. zuzufügen: „...verwenden, unter Benutzung der auch Reduktion III zugrunde liegenden Schlußweise, die *zeitlich* vor der Reduktion II liegt.“ Oder anders stilisiert, aber doch dem Sinn nach! Damit wäre dann auch klargestellt, was Sie aber vielleicht auch besonders sagen könnten, daß *Sie* den Satz zum Abschluß gebracht haben, *nicht ich*. Jetzt sieht es so aus, als hätte ich den Abschluß bewiesen, unter Benutzung *Ihrer* Abbau-Schlußweise aus II, was beides nicht stimmt!

Ebenso möchte ich auf S. 4, im 4.-letzten Absatz, mitgenannt sein, oder etwa das H. Hasse durch „wir“ ersetzt haben. Daß nämlich die Fassung mit den Faktorensystemen die *richtige* Verallgemeinerung ist, habe ich Ihnen schon auf dem Hanstein-Spaziergang im Frühling gesagt, als Sie mir die Widerlegung der Norm-Vermutung im Abelschen Fall erzählten. Sie haben es damals wahrscheinlich noch nicht ganz aufgefaßt; und es sich später selbst wieder überlegt. Genau genommen habe ich es Ihnen schon in Nidden gesagt[3], durch die Formulierung des „Hauptgeschlechtssatzes im Minimalen“.[4]

Weiter meine ich, bei Satz 3 – den ich im Augenblick nicht verschärfen kann, und für den Sie oder Brauer viel eher eine Verschärfung finden werden – sollten *Sie* sich wieder als *Verfasser* angeben; und den Satz nicht als „Förderung“, sondern als *Bestätigung einer bekannten Schurschen Vermutung* bezeichnen. Schur hat immer nur vermutet, daß Einheitswurzeln ausreichen, ohne Gradbeschränkung zu verlangen. Beim Beweis ziehen Sie doch genau die Ihrer Reduktion I zugrundeliegenden Sätze heran. Ich habe natürlich auch an diese Schursche Frage gedacht, aber nicht bemerkt, daß sie so einfach zu beantworten ist.[5]

Das wäre das „Historische“. Nun noch ein paar Kleinigkeiten: S. 5 ist die „reduzierte Diskriminante“ als „reduzierte Norm der Differente“ zu definieren (denn

$N(\pi) = p$; also $N(\pi^{n-1}) = N(\mathfrak{d}) = p^{n-1}$ bezieht sich auf *reduzierte* Norm); die nichtreduzierte Norm hat zwar dieselben Primzahlen wie die reduzierte Diskriminante, stimmt aber nicht mit dieser noch mit der unreduzierten Diskriminante überein![6]

Wollen Sie nicht S. 1 bei „normale Algebra" (im letzten Absatz, dritte Zeile) zur Erläuterung für deutsche Leser zufügen: wo also Ω Zentrum.[7]

Dann Schreibfehler: S. 4, erste Zeile steht II statt III; (III richtig). S. 5 müssen die Anmerkungen 5), 6) heißen (statt 4), 5)).

Mit der Verbeugung vor Hensel bin ich selbstverständlich einverstanden. Meine Methoden sind Arbeits- und Auffassungsmethoden, und daher anonym überall eingedrungen.[8]

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 12.11.1931

[1]Dies ist die Stellungnahme von Noether zu dem Hasseschen Text-Entwurf für die gemeinsame Arbeit von Brauer-Hasse-Noether [BHN32]. (Vgl.Anmerkung 6 zur vorangegangenen Postkarte vom 10. 11. 1931.) Wie Noether vorgeschlagen hat, findet sich in der publizierten Arbeit eine Fußnote mit dem Text: „*Die Abfassung dieser Note übernahm H. Hasse.*"

[2]Hasse hatte im Manuskript darauf hingewiesen, dass ein Sylow-Argument, so wie es in der Arbeit benutzt wurde, schon früher von R. Brauer benutzt worden war (vgl. Postkarte vom 10. 11. 1931). Weiter hatte Hasse formuliert:

„*Neuerdings hat Albert für diesen Gedanken sowie überhaupt für eine Reihe von allgemeinen Sätzen der R. Brauerschen und E. Noetherschen Theorie einfache, von der Darstellungstheorie unabhängige Beweise entwickelt.*"

Und er zitiert zwei Arbeiten von Albert in den Transactions of the AMS Band 33, [Alb31a] und [Alb31b]. Der von Noether angesprochene „Satz 19" von Albert findet sich in der zweiten dieser Arbeiten. Weil Noether dort nichts von den Brauerschen Sylow-Argumenten finden kann, so meint sie, dass der Hinweis auf Albert in dieser Fußnote abgeschwächt werden müsse. In ihrem nächsten Brief wiederholt sie ihren Standpunkt, jedoch im übernächsten Brief (vom 22. 11. 1931) zieht sie ihren Einspruch zurück, nachdem sie von Hasse über die Leistung von Albert genauer informiert worden war.

[3]Hasse hatte in den Teil 2 seines Klassenkörperberichtes [Has30a] den auf Hilbert-Furtwängler zurückgehenden Satz aufgenommenen, dass das Lokal-Global-Prinzip für Normen bei zyklischen Zahlkörper-Erweiterungen von Primzahlgrad gilt. Gleichzeitig hatte er dort die die Vermutung aufgestellt, dass dieses Lokal-Global-Prinzip für beliebige abelsche Erweiterungen von Zahlkörpern richtig ist. Später, im Frühjahr 1931 hat Hasse dann gezeigt, dass seine Vermutung zwar für beliebige zyklische, aber nicht allgemein für abelsche Erweiterungen gilt [Has31a]. Offenbar hatte er das Emmy Noether im Frühjahr bei einem Spaziergang zum Hanstein erzählt, und Noether hatte ihn dann darauf aufmerksam gemacht, dass das Äquivalent der Normfaktorgruppe (im Fall von zyklischen Erweiterungen) die Gruppe der Faktorensysteme (im Fall beliebiger galoisscher Erweiterungen) ist. – Hanstein ist eine Burg südlich von Göttingen. – Nidden ist ein Ostseebad auf der Kurischen Nehrung in Ostpreußen. Im Anschluss an die DMV-Tagung in Königsberg im September 1930 hatten Hasse und Emmy Noether einen Ausflug nach Nidden unternommen.

[4]Wenn Noether vom „Hauptgeschlechtssatz" spricht, dann benutzt sie die klassische Terminologie der quadratischen Formen bezw. der Divisoren, bei denen es „Geschlechter" und ein „Hauptgeschlecht" gibt. Der klassische Hauptgeschlechtssatz kann gedeutet werden als das Verschwinden der 1-Kohomologie gewisser Divisoren- oder Einheitengruppen. Wenn immer Noether eine ähnliche Situation von Galoismoduln findet, bei denen die 1-Kohomologie verschwindet, dann tendiert sie dazu, dies als „Hauptgeschlechtssatz" zu bezeichnen. – Wenn Noether von lokalen Objekten spricht, also von lokalen Erweiterungen etc., dann sagt sie, dies spiele sich „im Kleinen" ab; bei globalen Untersuchungen befindet sie sich „im Großen". Im vorliegenden

Falle spricht sie vom „Hauptgeschlechtssatz im Minimalen"; das bedeutet das Verschwinden der 1-Kohomologie beim Restklassenkörper, der hier ein beliebiger Körper sein kann. Also: Der „Hauptgeschlechtssatz im Minimalen" ist der Satz, der heute allgemein als „Hilbertscher Satz 90" zitiert wird, bezugnehmend auf den Hilbertschen Zahlbericht [Hil97]. Der Satz besagt, dass die 1-Kohomologie der multiplikativen Gruppe eines Galoisschen Körpers verschwindet. Hilbert hatte dies jedoch nur für zyklische Gruppen formuliert und bewiesen. Den allgemeinen Satz für beliebige Galoisgruppen verdankt man Speiser [Spe19]. – Übrigens hat Hasse in der Tat das Wort „wir" an der von Noether gewünschten Stelle eingefügt (nämlich im letzten Absatz vor dem Abschnitt „Folgerungen").

[5]Es geht um den Satz, dass jede absolut irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe der Ordnung n schon im Körper der n^h-ten Einheitswurzeln realisierbar ist, für hinreichend großes h. Hasse zeigt hier, dass dies eine einfache Folge des Lokal-Global-Prinzips ist. I. Schur hatte vermutet, dass dies schon für $h = 1$ gilt; deshalb spricht Hasse nicht von einer „Bestätigung", sondern von einer „Förderung" der Schurschen Vermutung. Noether meint, dass Schur niemals vermutet habe, dass man $h = 1$ nehmen kann. Im nächsten Brief nimmt sie das jedoch zurück, und deshalb wurde in das Manuskript eine Fußnote angefügt, wo die betreffende Arbeit [Sch06] genau zitiert wird.

Übrigens hat Hasse später, im Jahre 1949, eine kurze Note in den Mathematischen Nachrichten publiziert [Has50c], in welcher er auf einen „offensichtlichen" Fehler in seinem Beweis hinweist und diesen Fehler korrigiert. Zu jenem Zeitpunkt hatte jedoch, worauf Hasse hinweist, Richard Brauer bereits die volle Schursche Vermutung bewiesen, also $h = 1$, und sogar noch schärfer, dass bereits der Körper der e-ten Einheitswurzeln ausreicht, wenn e der Exponent der Gruppe ist. Dazu hatte Brauer den inzwischen berühmt gewordenen „Satz über induzierte Charaktere" endlicher Gruppen bewiesen.

[6]Im Nichtkommutativen gibt es eine „reduzierte" Norm und eine gewöhnliche, also unreduzierte Norm; die letztere ist eine Potenz der ersteren. Entsprechend für die Spur. Daraus ergeben sich auch bei der Differente bezw. Diskriminante Unterschiede, je nachdem ob die reduzierte oder unreduzierte Version von Norm und Spur benutzt wird. – Übrigens kommt es im vorliegenden Fall nicht darauf an, ob die reduzierte Diskiminante oder die gewöhnliche Diskriminante genommen wird, denn beide haben dieselben Teiler. Deshalb hat Hasse in der publizierten Version an der betreffenden Stelle (Satz 2) das Wort „reduziert" jeweils in Klammern vor „Norm" und „Differente" gesetzt.

[7]Eine entsprechende Erläuterung der Terminologie „normal" hat Hasse in das Manuskript aufgenommen. – Wir ersehen aus der Noetherschen Bemerkung, dass die in Amerika übliche Terminologie „normal" im Jahre 1931 in Deutschland noch nicht verbreitet war. Später jedoch, nachdem sich Deuring in seinem Ergebnisband [Deu35a] dieser Terminologie angeschlossen hatte, wurde sie bald überall benutzt. (Inzwischen hat sich übrigens die Terminologie noch einmal geändert; man sagt jetzt „zentral" statt „normal".) Auch die Terminologie „Algebren" finden wir in der vorliegenden Arbeit bei Hasse zum ersten Mal; noch in der kurz zuvor in den Mathematischen Annalen erschienenen Arbeit von Hasse über „$\wp$-adische Schiefkörper und hyperkomplexe Zahlsysteme" [Has31d] werden „hyperkomplexe Systeme" statt „Algebren" behandelt. Noether selbst hat die Terminologie übrigens nicht gewechselt; sie spricht in ihren Arbeiten und Briefen auch später fast immer nur von „hyperkomplexen Systemen".

[8]Dieser Satz hat inzwischen in der Noether-Literatur eine gewisse Berühmtheit erlangt. Er zeigt, dass Noether sehr überzeugt war von der Kraft und dem Erfolg „ihrer Methoden", welche sie treffend charakterisiert. Aber weshalb schrieb sie diesen Satz gerade hier, bei der Diskussion des Widmungstextes für Hensel? Die Antwort liegt nahe: Einerseits möchte Noether gegenüber Hasse hervorheben, dass schliesslich auch „ihre Methoden" für den Erfolg verantwortlich sind, nicht allein die Henselschen p-adischen Methoden, die Hasse erwähnt. Andererseits legt sie keinen besonderen Wert darauf, dass dies öffentlich anerkannt wird. Hasse hat zwar den Widmungstext für Hensel in der vorliegenden Arbeit nicht abgeändert; der Text erscheint im 3. Absatz der Arbeit. Hasse hat jedoch die öffentliche Anerkennung der Noetherschen Methoden im folgenden Jahr nachgeholt, nämlich auf seinem Vortrag im September 1932 auf dem internationalen Mathematiker-Kongress in Zürich [Has32c]. Dort berichtet er über den Hauptsatz der Algebren und sagt dazu: „*Der Beweis dazu ergibt sich durch Kombination der von Hensel geschaffenen arithmetischen Methoden, die ich im Anschluß an Speiser in diese Theorie hineingetragen habe, mit gewissen algebraischen Methoden, die, auf früheren Untersuchungen von Speiser und I. Schur fußend, kürzlich von*

R. Brauer und E. Noether entwickelt wurden." Schon vorher, zu Noethers 50. Geburtstag im März 1932, hatte Hasse ihr eine Arbeit [Has33b] gewidmet und darin im Vorwort die Ideen und Methoden Emmy Noethers hervorgehoben. Vgl. den Brief vom 26. 3. 1932.

---

37 14.11.1931, Noether an Hasse

Göttingen, 14. 11. 31

Lieber Herr Hasse!

Ich will nummernweise antworten.[1]

ad 2) Ich habe Albert noch einmal eingesehen: auch in Satz 20 handelt es sich *nur* um *zyklische* Algebren; und wieder um den Satz daß jeder Primteiler des Index im Exponenten vorkommt. Auch später bleibt die Voraussetzung des zyklischen. Ich schlage vor, zu der Anmerkung statt „diese Reduktion" zu schreiben: „diesen Index-Exponentensatz im zyklischen Spezialfall, sowie ... " und das Satz-Zitat ganz zu streichen (eventuell Satz 19, 20); denn später (Satz 22 u. ff) handelt es sich um Anwendung auf Riemannsche Matrizen. Satz 21 bringt die Tatsache $A \times A' \sim \Omega$ für zyklische Algebren, wo A' reziprok isomorph zu A.[2]

ad 3) und ad 1) Die Tatsache der verschiedenenen Eigenzeiten hat mich sehr überrascht. Ich hatte geglaubt, Sie hätten im Augenblick der Lektüre meiner Reduktion die Sache durch Reduktion 2 zum Abschluß gebracht, und *das* wollte ich festgehalten haben. Es war mir nicht in den Sinn gekommen, daß man die formal kompliziertere Reduktion von K auf L mit K/L auflösbar besitzt, und die einfachere, wenn K/L zyklisch, nicht findet; aber es geht manchmal so.[3] Ich möchte jetzt vorschlagen, daß Sie entsprechend dem Toeplitz-Zitat in Ihrem Brief der Anmerkung 0) etwas derartiges zufügen: daß der Beweis in der Reihenfolge der Entstehung wiedergegeben ist; daß ein systematischer Beweis erst durch Umkehrung entsteht; oder beliebig anders stilisiert. (Auf S. 3. wäre dann wohl Ihre vorgeschlagene Einschiebung unnötig). Bei mir persönlich hat nämlich die Umkehrung, die ich nicht verstand, das Gegenteil der Toeplitzschen Freude erwirkt; ich habe nur wegen der drängenden Zeit den „Antrag auf Systematisierung" unterlassen, und statt dessen den Vorschlag des Zusatzes gemacht.[4]

ad 5) Daß Sie hinter die Folgerungen *Ihren* Namen setzen, ist absolut richtig. Satz 2 habe ich doch nur im Anschluß an frühere briefliche Mitteilungen von Ihnen formuliert. – Im letzten Satz der ersten Index-Arbeit (Berl. Berichte) sagt Schur: „Alle bisher bekannten Gruppen sind durch n-te Einheitswurzeln darstellbar". Da das vermutlich die einzige gedruckte Stelle ist, wird man wohl tatsächlich das als „Schursche Vermutung" ansprechen müssen. R. Brauer wird Ihnen ja genaueres sagen können.[5]

ad 6) Selbstverständlich muß Brauer bei Reduktion 3 erwähnt werden: es ist eben tatsächlich nur eine „Trivialisierung", und wenn man 2. kennt, ganz trivial.[6] Aber vielleicht kommen jetzt die für andere Fragen (vergl. 10)) so wichtigen nichtgaloisschen verschränkten Produkte endlich heraus, dank Ihrer Rechnungen!

ad 9) Daß es sich um die „übliche“ Norm der Differente handelt, hatte ich schon gestern bemerkt, aber nicht mehr geschrieben, da ich – mit Recht – heute einen Brief von Ihnen vermutete. Die „reduzierte Norm“ gibt das, was Brandt im Spezialfall der Quaternionen die „Grundzahl“ nennt; die reduzierte Diskriminante wird n-te Potenz dieser Grundzahl.

Dabei definiere ich „reduzierte Norm eines Ideals“ an jeder Stelle: da hier das Ideal Hauptideal, einfach als reduzierte Norm eines Basiselements. Die gewöhnliche Norm wird als Determinante der Übergangssubstitution an jeder Stelle gleich der *nicht*-reduzierten Norm eines Basiselements: also $N_{\text{red}}(\mathfrak{p}_k) = N_{\text{red im Schiefkörper}}(\pi^r) = p^r$; mit $n = mr$; gewöhnl. $N(\mathfrak{p}) = p^{rm}$. Eigentlich finde ich, wenn man alles reduziert betrachtet, Grundzahl vernünftiger als Diskriminante; tatsächlich arbeitet auch Brandt bei Aufzählung aller Fälle mit der Grundzahl.

ad 10) Herzlichen Glückwunsch. Das sieht sehr vielversprechend aus! Aber ich verstehe eine Stelle im Beweis nicht! Woraus folgt, daß der Durchschnitt $T_{\mathfrak{p}}$ von $U_{\mathfrak{p}}$ mit $K_{\mathfrak{p}}$ der größte in $K_{\mathfrak{p}}$ enthaltene unverzweigte Körper ist. Das ist doch Ihre Behauptung: Grad $T_{\mathfrak{p}}$ ist $f_{\mathfrak{p}}$, die dem folgenden zugrunde liegt. Kann denn nicht $K_{\mathfrak{p}}$ etwa einen $U_{\mathfrak{p}}$ umfassenden, unverzweigten Teilkörper besitzen (dann wäre er sicher Zerfällungskörper), oder aber einen unverzweigten, dessen Grad über $T_{\mathfrak{p}}$ zu $m_{\mathfrak{p}}$ prim, wobei T echter Teilkörper von $U_{\mathfrak{p}}$. *Habe ich hier etwas mißverstanden; oder ist wirklich eine Lücke*? [7]

Wie dem auch sei hier geht es voran!

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 14.11.1931

[1] Offenbar beziehen sich diese Nummern auf den Brief von Hasse, den dieser als Antwort auf Noethers vorangegangenen Brief vom 12. 11. 1931 geschickt hatte. Wir kennen die unter den verschiedenen Nummern behandelten Fragen aus dem Hasseschen Brief nicht, aber aus den Antworten von Noether kann man ungefähr entnehmen, worum es geht.

[2] Zu Albert vgl. den nächsten Brief vom 22. 11. 1931. – Übrigens: Der Satz 21 enthält einen Fehler Alberts, er formuliert den Satz für $A \times A$ statt $A \times A'$. Albert hat den Fehler (im Satz und im Beweis) nachträglich in einer „Erratum“–Seite korrigiert; offenbar hat aber Noether den Fehler sogleich bemerkt und den Satz richtig formuliert.

[3] Noether spricht hier die Reihenfolge an, in der jeder der drei Autoren (also Hasse, Brauer, Noether) seinen Beitrag zu dieser Arbeit geleistet hatte. Hasse hatte in seinem Manuskript den Beweis in drei Schritte eingeteilt, die er Reduktion 1, 2 und 3 nannte. Es geht um den Hauptsatz, dass jede einfache Algebra über einem Zahlkörper zyklisch ist. In der Reduktion 1 führte Hasse den Hauptsatz zurück auf das Lokal-Global-Prinzip für Algebren. In der Reduktion 2 führte Brauer das Lokal-Global-Prinzip für Algebren mit Hilfe eines Sylow-Arguments auf den Fall zurück, dass die Algebra auflösbar darstellbar ist. Und schliesslich lieferte Emmy Noether in Reduktion 3 die Zurückführung vom auflösbaren Fall auf den zyklischen Fall. Aber für zyklische Algebren hatte Hasse das Lokal-Global-Prinzip schon in seiner amerikanischen Arbeit [Has32d] bewiesen (diese war zwar noch nicht erschienen, aber Brauer und Noether waren über ihren Inhalt informiert). Die Verwunderung Noethers, dass Hasse, als er von Brauer schon den Reduktionsschritt 2 kannte, nicht sofort Reduktion 3 fand sondern diese erst durch Noethers Brief vom 8. 11. 1931 kennenlernte, ist durchaus berechtigt. Überhaupt scheinen uns heute im Nachhinein die Reduktionen 2 und 3 ziemlich auf der Hand liegend; dies scheint Emmy Noether auch schon hier zu empfinden.

[4] Wir wissen nicht, welches Toeplitz-Zitat Hasse in seinem Brief genannt hatte. Toeplitz hat sich sehr für die „genetische Methode“ im Mathematik-Unterricht eingesetzt, was bedeutet, dass

die mathematischen Sätze und Theorien gemäß ihrer Entstehung gelehrt werden sollten und (jedenfalls bei Anfängern) nicht gemäß der logischen Systematisierung, die historisch meist erst später vorgenommen wurde. (Vgl. das in den „Grundlehren" des Springer-Verlages erschienene Toeplitzsche „Lehrbuch der Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode" [Toe49].) Es ist anzunehmen, dass sich Hasse eines Zitats von Toeplitz (mit dem er in freundschaftlichem Briefwechsel stand) über die genetische Methode bedient hat, um die Form seines Manuskripts zu rechtfertigen, wo er ja die Beweisschritte in der Reihenfolge anführte, wie sie gefunden wurden. In Wahrheit war der Grund wohl der, dass die Zeit drängte und es Hasse zeitlich nicht mehr möglich war, das Manuskript umzuarbeiten, wie es Noether eigentlich wollte, wie wir hier sehen.

[5] Vgl. Anmerkung 5 zum vorangehenden Brief vom 12. 11. 1931.

[6] Im Text der publizierten Version findet sich demgemäß der Satz: „*Unabhängig von E. Noether hatte sich übrigens auch R. Brauer diese dritte Reduktion schon überlegt.*" In dem Briefwechsel Hasse-Brauer haben wir dazu die Bestätigung gefunden.

[7] Wir kennen das Thema von Punkt 10) in Hasses Brief nicht. Aufgrund der Bezeichnungen, die Noether hier benutzt, ist jedoch anzunehmen, dass es Hasse gelungen war, das *lokale Normenrestsymbol* auch rein lokal zu definieren, oder wenigstens dass er auf dem Wege dazu war. Das ist der erste Schritt zum Aufbau der lokalen Klassenkörpertheorie ohne den Umweg ins Globale. Vgl. Brief vom 12. 4. 1931.

---

38 22.11.1931, Noether an Hasse

Göttingen, 22. 11. 31

Lieber Herr Hasse!

Ich muß Ihnen wieder einmal auf verschiedene Briefe antworten; Ihre Resultate kommen bald schneller als unser Aufnahmevermögen. Die Briefe liegen übrigens schon bei Deuring (der von Leipzig aus ein paar Tage hier ist, sein Vater ist gestorben) um in den Bericht zu kommen.[1] Deuring bittet auch um eine Korrektur der amerikanischen Arbeit für den Bericht. Es eilt nicht. (Sie haben doch nichts dagegen?) Ob wohl der Existenzsatz als Abschluß in einem halben Jahr auch vorhanden ist?[2] Einerlei; die Bresche ist da!

In meiner Ausarbeitung steht am Schluß – ich zitiere nach dem Gedächtnis – (auf den Blättern die Sie hatten, noch nicht): Die Tatsachen

1. (Hasse) daß die Gruppe $\mathfrak{A}$ der Algebren über einem $\mathfrak{p}$-adischen Grundkörper $k_\mathfrak{p}$, deren Index ein Teiler von n, genau die zyklische n-ter Ordnung;

2. daß die Untergruppe $\mathfrak{A}_Z \subset \mathfrak{A}$ der Algebren, die Z zum Zerfällungskörper besitzen, wo $Z/k_\mathfrak{p}$ zyklisch n-ten Grades, schon das ganze $\mathfrak{A}$ ausschöpfen,

können als der wesentlichste Inhalt der Klassenkörpertheorie im Kleinen bezeichnet werden. (Es müßte heißen: des Umkehrsatzes der Kl[assenkörper] Th[eorie] i[m] Kl[einen].)[3]

Sie sehen also, „im Kleinen" hatte ich Ihre Auffassung; den Schritt ins Große hatte ich *nicht* gemacht.[4] Auf derselben Auffassung – ein Jahr früher als ich sie noch nicht so scharf hatte – beruht der Deuringsche Normenvertauschungssatz:

das Invariante ist die Gruppe der Algebren.[5] Aber den Schritt ins Große hat er ebenfalls nicht gemacht.

Ich hatte mir, früher schon und dieser Tage genauer, die Möglichkeit eines andern Übergangs ins Große überlegt; nämlich die Erweiterung der Galoisschen Gruppe G von K/k mit der Gruppe J der absoluten Idealklassen von K (nicht k); also das rein multiplikative verschränkte Produkt $J \divideontimes G$[6] – und zwar aus folgendem Grund: Man kommt so, nach eventuell noch stärkerer Erweiterung, zu den Schurschen Darstellungsgruppen und ihrer Verknüpfung; d.h. zu der „Gruppe der Darstellungsgruppen", die jetzt in Analogie mit der Gruppe der Algebren im $\mathfrak{p}$-adischen Fall wieder *endlich* wird. Einer „Ähnlichkeitsklasse von Algebren" entspricht dabei eine Darstellungsgruppe (→ zugeordnete Divisionsalgebra) und ihre Erweiterungen (→ Matrizenringe darüber).

Nun ist für die Klassenkörpertheorie im Kleinen die oben angeführte Tatsache 1) nichts weiter, als Satz 8, Teil I Ihres Berichts ($h_{\mathfrak{m}} \leq n$)[7]; wegen der expliziten Aufstellung der Gruppe $\mathfrak{A}$ werden analytische Hilfsmittel entbehrlich. Und meine Vermutung geht dahin – ob es stimmt weiß ich natürlich nicht – daß die Schurschen Untersuchungen ein ähnliches Hilfsmittel im Großen an die Hand geben könnten. Natürlich wird nebenbei noch irgendwie Ihre Gruppe $\mathfrak{K}$ der Algebren zu K hineinspielen: die Tatsache daß es sich um Idealklassen von K, und nicht um abstrakte Gruppenelemente handelt, muß doch ausgenutzt werden.[8]

Von hier aus müßte auch der Hauptidealsatz verständlich werden; ist K/k der absolute Klassenkörper, so ist $J \divideontimes G$ ja einfach die zum zweiten Klassenkörper gehörige metabelsche Gruppe, bei passender Wahl des Faktorensystems in $J \divideontimes G$.

Die obige Tatsache 2) – die fundamentale Ungleichungsfolge von der andern Seite her – müßte sich wohl auch konstruktiv mit hyperkomplexer Einbettung behandeln lassen: hier würden dann die Galoismoduln hineinspielen. Aber einstweilen ist alles Phantasie!

Nächste Woche kommt Ihre Gruppe der $\mathfrak{p}$-adischen Schiefkörper[9] im Seminar, und anschließend dann eine Skizze des „Forschungsberichts". Diese Woche konnte er nur angekündigt werden; ich bekam ihn gerade vor Seminaranfang in die Hände.[10]

Gut daß Sie die Sache mit Albert in Ordnung gebracht haben: da die Hefte noch ungebunden waren, dachte ich nicht daran die übrigen einzusehen, als ich die Arbeit zu haben glaubte. Er scheint mir also wirklich etwas zu können![11] Mit der Fußnote bin ich ganz einverstanden.[12] – Daß übrigens alle Leute den Beweis finden, kommt einfach daher, daß *Sie* ihn gefunden haben.[13] Denn das noch Fehlende war trivial für jeden, der nicht wie Sie in die Sache verbohrt war.[14]

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 22.11.1931

[1]Es handelt sich um den Ergebnisbericht über Algebren, von dem schon in früheren Briefen Noethers die Rede war. Laut Verlagsvertrag sollte das Buch im Frühjahr 1932 fertig sein; daher

schien es eilig, damit Deuring die neuen Ergebnisse noch berücksichtigen konnte. Die Fertigstellung verzögerte sich jedoch; das Buch erschien erst 1935.

[2]Es handelt sich um den Existenzsatz für zyklische Körper vorgegebenen Grades, dessen lokale Grade an endlich vielen Stellen vorgegeben sind. Dieser Existenzsatz wird in der gemeinsamen Arbeit [BHN32] von Hasse mit Noether und Brauer zwar benutzt, dort aber nicht bewiesen. Der Satz wurde in verschärfter Form 1933 von Grunwald [Gru33] bewiesen, indem nicht nur die lokalen Grade, sondern sogar die zyklischen lokalen Körpererweiterungen dieser Grade vorgegeben sein dürfen. Diese Verschärfung erwies sich jedoch nicht als korrekt, weil Wang 1948 ein Gegenbeispiel fand [Wan48]. Eine genauere Diskussion des Sachverhalts findet sich in [Roq04a]. Vgl. Anmerkung 7 zum Brief vom 2. 6. 31.

[3]Der „Umkehrsatz im Kleinen“ besagt: Jede abelsche Erweiterung von $k_\mathfrak{p}$ ist Klassenkörper in dem Sinne, dass die Normgruppe denselben Index in $k_\mathfrak{p}^\times$ besitzt wie der Grad des Körpers über $k_\mathfrak{p}$. – Bei der „Ausarbeitung“, von der Noether spricht, handelt es sich um die Ausarbeitung ihrer Vorlesung vom Wintersemester 1929/30 mit dem Titel: „Algebra der hyperkomplexen Größen“. Die Ausarbeitung wurde von Deuring angefertigt, jedoch erst posthum publiziert, nämlich in den Gesammelten Abhandlungen von Emmy Noether [Noe83]. Dort finden wir am Schluss in der Tat den in diesem Brief von Noether zitierten Text. Hasse hatte ein Exemplar dieser Ausarbeitung erhalten, die er dann benutzte, um in seiner amerikanischen Arbeit [Has32d] die Theorie der Faktorensysteme und verschränkten Produkte darzustellen (mit Noethers Erlaubnis). Wie wir in diesem Brief erfahren, befand sich der zitierte Text noch nicht auf den Blättern, die Hasse zur Verfügung standen.

Emmy Noether betrachtet jedoch hier (und in ihrer Ausarbeitung) nur *zyklische* und nicht beliebige abelsche Erweiterungen; offenbar hält sie das für den wesentlichen Teil der Klassenkörpertheorie. Die Übertragung vom Zyklischen zum Abelschen ist jedoch nicht trivial, jedenfalls war sie es damals nicht unter Berücksichtigung des damaligen Kenntnisstandes über Galois-Kohomologie. Diese Übertragung wurde zuerst von Chevalley [Che33a] ausgeführt. Noether gibt in ihrem Züricher Vortrag [Noe32a] zu, dass dazu „*noch neue algebraische Sätze über Faktorensysteme zu entwickeln waren*“, und sie verweist auf die obige Arbeit von Chevalley.

Zu dem Thema „Algebrentheorie und Klassenkörpertheorie“ vgl. auch den Brief vom 25. 6. 1930, insbesondere Anmerkung 11. Dort hatte Noether im Anschluss an Hasses Arbeit [Has31d] bereits das hier vorliegende Problem angesprochen, allerdings noch ohne dass die in dem vorliegenden Brief formulierten Aussagen 1. und 2. als richtig erkannt waren. Nun aber, in dem hier diskutierten Manuskript zur gemeinsamen Arbeit [BHN32], hat Hasse diese Aussagen bewiesen, aufbauend eben auf seiner o. .g. Arbeit [Has31d]. Das ist der Grund, weshalb Noether jetzt nochmals auf dieses Thema zu sprechen kommt.

[4]„Im Kleinen“ bedeutet bei Noether „lokal“. Im vorliegenden Falle handelt es sich um den Satz, dass im Lokalen eine Körpererweiterung genau dann Zerfällungskörper einer gegebenen einfachen zentralen Algebra ist, wenn der Körpergrad ein Vielfaches des Schurschen Index der Algebra ist. Der Schritt „ins Große“ bedeutet, dass mit Hilfe des Lokal-Global Prinzips die Eigenschaft, Zerfällungskörper zu sein, auf den lokalen Fall zurückgeführt wird.

[5]Noether bezieht sich auf die Arbeit von Deuring in den Göttinger Nachrichten [Deu31b]. Dort wurde ein algebrentheoretischer Beweis des Vertauschungssatzes für das Hilbertsche Normsymbol gegeben.

[6]Wie bereits früher gesagt, benutzt Noether das Zeichen ⋇ zur Bezeichnung für ein verschränktes Produkt.

[7]Es handelt sich um die sogenannte erste Ungleichung der Klassenkörpertheorie; die Bezeichnungen waren damals Standard und daher brauchte sie Emmy Noether nicht zu erklären. n ist der Grad des in Rede stehenden Galoisschen Körpers, und $h_\mathfrak{m}$ der Index der ihm durch die Klassenkörpertheorie zugeordneten Gruppe (hier: die Gruppe der Normen). Zur Herleitung dieser Ungleichung „im Großen“ waren damals analytische Überlegungen über die Zetafunktionen und L-Reihen erforderlich.

[8]Diese Ausführungen, so vage sie sind, scheinen anzudeuten, dass sich Noether auf dem Wege zur Galois-Kohomologie und zur kohomologischen Auffassung der Klassenkörpertheorie befindet.

[9]Das ist die Brauersche Gruppe eines $\mathfrak{p}$-adischen Körpers. Hasse hat bewiesen, dass sie isomorph zu $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist, vermöge der Hasseschen lokalen Algebra-Invarianten. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus den Resultaten der amerikanischen Arbeit [Has32d] von Hasse, ist jedoch dort noch nicht ausdrücklich formuliert. Er findet sich aber in der nächsten Arbeit [Has33b] von Hasse. Es

mag sein, dass Hasse zu dieser Zeit bereits an dem Manuskript zu [Has33b] arbeitete, und dass er Noether über die wichtigsten neuen Resultate daraus informiert hat. Das würde den ersten Satz des vorliegenden Briefes erklären, in dem Noether schreibt: „*Ihre Resultate kommen bald schneller als unser Auffassungsvermögen ...*"

[10]Uns ist unbekannt, welchen „Forschungsbericht" Noether meint. Möglicherweise handelt es sich um eine Skizze für das Deuringsche Buch über Algebren: [Deu35a].

[11]Es geht um eine Fußnote in der gemeinsamen Arbeit [BHN32]. Diese Fußnote würdigt die Beiträge Alberts zu dem Beweis des Lokal-Global-Prinzips für Algebren. In den beiden vorangegangenen Briefen hatte Noether dafür plädiert, den Hinweis auf Albert in der von Hasse eingesetzten Fußnote abzuschwächen. Nunmehr hat sie sich offenbar durch die nachdrücklichen Vorhaltungen Hasses davon überzeugt, dass Albert mehr gemacht hatte, als sie zunächst angenommen hatte; Noether hatte nämlich eine Arbeit von Albert übersehen. Es handelt sich um die Arbeit „On direct products" in den Transactions AMS [Alb31a]. Diese Arbeit war erst kürzlich erschienen, und wie Noether selbst schreibt, hat sie sie bei der Durchsicht der Neueingänge einfach übersehen.

Es ist interessant, durch diese Briefstelle zu erfahren, dass Hasse darauf bestanden hatte, den Hinweis auf Albert trotz des Einspruchs von Noether in der ursprünglichen Weise zu erhalten. Hasse hatte im Januar 1931 einen brieflichen Gedankenaustausch mit Albert begonnen, in dem sich die beiden Briefpartner gegenseitig über ihre neuesten Resultate informierten. Albert, damals 25 Jahre alt, war einer der aktiven Mathematiker der jüngeren Generation in Amerika, der sich mit Algebren beschäftigte. Hasse war daran gelegen, dass die in dem Kreis um Emmy Noether entwickelten Methoden zur Untersuchung der Algebren und ihrer Zahlentheorie auch in Amerika bekannt wurden; das scheint einer seiner Hauptgründe gewesen zu sein, die Korrespondenz mit Albert zu beginnen. Wie mit allen seinen Korrespondenten, tauschte Hasse freimütig die neuesten Ergebnisse, sobald sie ihm bekannt wurden, mit Albert aus. Vgl. dazu auch [Roq04a].

Bemerkung: In [FS05] heißt es: „*Emmy Noether seems to have served as the principal proponent of the footnote giving credit to Albert's work.*" Der vorliegende Brief im Verein mit den vorangegangenen beiden Briefen Noethers zeigt jedoch, dass es nicht so war. Denn Noether war zunächst *gegen* die von Hasse vorgeschlagene Formulierung, wie wir den Briefen entnehmen können, und sie hat sich erst durch nachdrückliche Vorhaltungen Hasses überzeugen lassen. Wenn man also überhaupt von einem „principal proponent" für die Albert-Fußnote sprechen will, so ist dies eindeutig Hasse gewesen.

[12]Hasse hat die in Rede stehende Fußnote dann nochmal durch einen „Zusatz bei der Korrektur" ergänzt. Inzwischen hatte er nämlich Nachricht von Albert erhalten, aus der hervorging, dass sich Albert seit einiger Zeit aufgrund der verschiedenen Mitteilungen von Hasse unabhängig die Voraussetzungen erarbeitet hatte, die den „Reduktionen 2 und 3" der Arbeit Brauer-Hasse-Noether [BHN32] zugrundeliegen. Zwar waren diese Resultate inzwischen durch den neuen Beweis in [BHN32] überholt (zumindest als Hilfsmittel zum Beweis des Lokal-Global Prinzips), jedoch, so schreibt Hasse in dem Zusatz, kommt auch „*A. A. Albert ein unabhängiger Anteil am Beweis des Hauptsatzes*" zu. Darüberhinaus hat Hasse gemeinsam mit Albert eine Arbeit publiziert, in der die jeweiligen Beiträge von Albert einerseits, und von Brauer-Hasse-Noether andererseits in zeitlicher Reihenfolge dargestellt werden [AH32].

[13]Zunächst hatte Hasse nur ein Teilresultat gefunden, nämlich das Lokal-Global-Prinzip für jede *abelsch darstellbare* Algebra. Das geht aus Noethers Postkarte Nr. 33 vom 27. 10. 1931 und dem folgenden Brief Nr. 34 hervor. Inzwischen hatte jedoch Hasse mit seiner ziemlich umständlichen Methode auch den Fall einer beliebigen einfachen zentralen Algebra erledigen können. Zwar kennen wir diesen Beweis nicht, wir wissen jedoch dass er existierte, aus einem Brief von Hasse an Richard Brauer vom 16. 11. 1931. Dort schreibt Hasse, dass er sich zunächst in „*geradezu labyrinthischer Weise gequält*" habe, aber doch bei Eintreffen der Noetherschen Karte (es handelt sich um die Postkarte Nr. 33) im wesentlichen durchgekommen war. Offenbar hatte er das auch an Noether geschrieben, sodass sie hier sagen kann, dass Hasse den Beweis gefunden habe.

[14]So würden wir das auch heute sehen. Es ist bemerkenswert, dass es fast ein Jahr gedauert hatte, bis diese wirklich triviale Schlussweise gefunden wurde. Diese findet sich dann noch einmal explizit in Noethers Brief vom 27. 1. 1932.

39 02.12.1931, Noether an Hasse, Postkarte

2. 12. 31

Lieber Herr Hasse!

Können Sie mir den Film meines Schiffbildes (Danzig-Königsberg) einmal schicken? Für ein paar Tage? Die Chicagoer bauen ein neues mathematisches Institut[1] - oder haben es schon gebaut - und wollen die Wände mit Mathematikerbildern tapezieren. Nun ist Ihr Bild das einzig anständige was es von mir gibt. Ich besitze aber nur noch die einzige, schon sehr ramponierte Vergrößerung (sie diente schon zum Negerweib), und möchte daher für Chicago neue anfertigen lassen. Das geht nach Aussage der Photographen besser mit Hilfe des Films als eines vorhandenen Bildes. Falls das Schicken unbequem ist, ist mir auch recht wenn Sie auf meine Kosten in Marburg vergrößern lassen.[2]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Das neulich erwähnte verschränkte Produkt $J \divideontimes G$ (J Idealgruppe in K, aus der *Gesamtheit* der Ideale bestehend) hat die Bedeutung, alle $\mathfrak{O}$ (Hauptordnung von K) enthaltenden Maximalordnungen von $K \divideontimes G \sim k$ in einander zu transformieren. (Wie es bei $K \divideontimes G \sim D \neq k$ steht, habe ich nicht untersucht.)[3]

Anmerkungen zum Dokument vom 2.12.1931

[1]Es handelt sich um Eckhart Hall.

[2]Zum Schiffsbild vgl. die Anmerkungen zum Brief vom 24. 12. 1930. – Noether hat tatsächlich ihr Foto nach Chicago geschickt, und dort hat es viele Jahre in Eckhart Hall gehangen. Nach unseren Recherchen hing es zuletzt im Arbeitszimmer von Herstein. Heute ist das Bild in Chicago anscheinend nicht mehr auffindbar.

[3]Vgl. Brief vom 22. 11. 1931. – Nach Noethers Text scheint es Zusammenhänge zu geben mit der späteren Note von Noether im Herbrand-Gedächtnisband [Noe34]. Vgl. die Anmerkungen zum Brief vom 29. 10. 32.

Briefe 1932–1935

---

40 Januar 1932, Noether an Hasse

Januar 1932

Königsberg[1]

1) Szegö
2) Reidemeister
3) Kaluza
4) Rogosinsky
5) Franz Meyer

Berlin

6) A. Brauer
7) H. Hopf,z.Z. Amerika, nach Rückkehr,
8) Feigl
9) Hammerstein
10) Mises
11) Löwner
12) Frau Pollaczek-Geiringer
13) Remak
14) E. Rothe (Breslau)
15) E. Hopf
16) Fekete
17) Geppert
18) Bochner

Lieber Herr Hasse!

Anbei Ihre Liste und die Brauersche Ergänzung. Meine Liste werde ich nach der Verteilung schicken, um noch etwas freie Hand zu haben.

Ist nicht Bochner (18) mit Ihrem Bochner (90) identisch? Ludwig, Dresden, scheint mir überflüssig; er hat doch weder gruppen- noch zahlentheoretisch gearbeitet! Oder haben Sie persönliche Beziehungen? Dagegen wäre in Freiburg wohl auch noch an Kapferer zu schicken! Seit $1\frac{1}{2}$ Jahren Privatdozent und mir persönlich bekannt.

Skolem ist augenblicklich hier, sollten also die Separata innerhalb der nächsten 14 Tage kommen, so kann ich ihm persönlich ein Exemplar geben; wenn später, lassen Sie ihn bitte auf Ihrer Liste!

Ich lese diesen Winter hyperkomplex, was mir und den Zuhörern viel Vergnügen macht.[2] Shoda, Japaner und Schüler von Takagi, der seit Herbst hier ist, arbeitet

sehr schön in den Sachen. Eine Arbeit über die Automorphismengruppe und Aut[omorphismen]-Ring einer Abelschen Gruppe kommt eben in die Annalen.[3]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom Jan. 1932

[1] Bei den folgenden Namen geht es offenbar um Adressaten für die Versendung der Sonderdrucke der Arbeit Brauer-Hasse-Noether [BHN32]. Die Namen sind in der Handschrift von Richard Brauer geschrieben, offenbar handelt es sich also um die im Brief erwähnte Brauersche Ergänzungsliste. Noether benutzt diesen Zettel, um sogleich weitere Informationen an Hasse zu schreiben. Das Datum „Januar 1932“ stammt von Hasses Hand.

[2] Im Wintersemester 1931/32 hatte Noether eine Vorlesung mit dem Titel „Darstellungstheorie“ angekündigt. Zweistündig, Mittwochs 5-7 Uhr.

[3] Die Arbeit [Sho32] hat den Titel „Über die Galoissche Theorie der halbeinfachen hyperkomplexen Systeme“. Im Vergleich mit Noethers eigener Arbeit zu diesem Thema [Noe33b] §6, findet sich bei Shoda (abgesehen von neuen Beweisideen) eine Verallgemeinerung dahingehend, dass nicht nur einfache sondern auch halbeinfache Algebren in Betracht gezogen werden. Vgl. auch [Bra32a].

---

41 27.01.1932, Noether an Hasse, Postkarte

27. 1. 32

Lieber Herr Hasse!

Schönen Dank für die neue Beweisanordnung. Ich finde sie aber eine *Verkomplizierung*, nicht eine Vereinfachung gegenüber dem was ich, Trivialisierung und Postkarte nach Ihrer Sylow-Mitteilung zusammengenommen, Ihnen geschrieben hatte, was nur durch Ihre „historische“ Umstellung komplizierter wird. Der Schluß war, wenn man es in eins zusammenfassen soll:

Es gehe p in m auf; ich bilde die Kette $k \subset L_0 \subset \ldots \subset L_f = K$, dann ist mit K auch L_{f-1} Zerfällungskörper, also auch L_0 ; Grad nicht durch p teilbar, Widerspruch. Hier ist Lemma und zweiter Sylow-Satz verwendet, allerdings von L_f nach L_0 mit Induktion gegangen. Die neue Umordnung hat den Vorteil, *ohne Voraussetzung des überall Zerfallens*, etwas mehr über die Struktur der Zerfällungskörper auszusagen, was R. Brauer allerdings auch hatte. Oder legen Sie auf die Vermeidung des Induktionsschlusses so großen Wert?[1]

Es tut mir sehr leid, daß meine abends geschriebene Postkarte (Kastenleerung 21^h30) nicht mehr rechtzeitig dienstag morgen ankam; das Institut haftet Ihnen für Ihre Auslagen für Telefongebühren.[2]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 27.1.1932

[1]Es handelt sich um eine Beweisanordnung für das Lokal-Global-Prinzip für Algebren. Wir erinnern uns, dass Noether mit der früheren Beweisanordnung in der gemeinsam publizierten Arbeit [BHN32] nicht einverstanden war. (Vgl. Brief vom 14. 11. 1931.) Wir kennen die jetzt von Hasse vorgeschlagene neue Beweisanordnung nicht, aber Noether ist offenbar auch damit nicht einverstanden. Kurze Zeit später, zum 50. Geburtstag von Emmy Noether am 23. März 1932, widmet Hasse ihr seine große Arbeit über „Die Struktur der Brauerschen Algebrenklassengruppe, insbesondere Begründung der Theorie des Normenrestsymbols und die Herleitung des Reziprozitätsgesetzes mit nichtkommutativen Mitteln“ [Has33b]. Dort greift Hasse noch einmal das Thema des Lokal-Global-Prinzips auf, und ordnet seinen Beweis genauso an wie hier von Emmy Noether vorgeschlagen.

[2]Diese Postkarte ist nicht erhalten.

---

42 08.02.1932, Noether an Hasse

Göttingen, 8. 2. 32

Bei auflösbaren Gruppen kann man „∼ Faktorensystem Eins“ durch Faktorensystem der Kompositionsfaktoren, also durch Normen ausdrücken; das kann für die allgemeinen Führer von Bedeutung werden.[1]

Lieber Herr Hasse!

Der Strukturbeweis, den Sie wünschen, stand schon in der Ausarbeitung aus der Sie im vorigen Jahr die verschränkten Produkte herausgeholt haben, während Sie die erste Hälfte glaubten. Ich schicke Ihnen die zur Publikation bestimmte Fassung, bei der allerdings die Anwendungen – galoissche Theorie und Zerfällungskörper – noch nicht fertig geschrieben sind. Für den fraglichen Satz müssen Sie §3 (S. 14) und die ersten zwei Seiten aus §4 lesen, die von den vorangehenden §1 und 2 ganz unabhängig sind; es handelt sich um die „Folgerung aus dem Erweiterungssatz“ S. 18.[2] Und zwar ist dort nur der Fall behandelt, wo K nicht kommutativ normal über k, von endlichem oder unendlichem Rang, da prinzipiell alles Nichtkommutative (K mit Zentrum k) in den Vordergrund gestellt ist, als das sehr viel einfachere.[3] Der Fall eines kommutativen K über k wird erst im § über Zerfällungskörper erwähnt, einfach durch Vertauschen der Rollen, in dem – Bezeichnung S. 18 – A als von endlichem Rang nach P angenommen wird, und S als kommutativer endlicher Erweiterungskörper von P, also von A zu $A_S = S_A$ übergegangen wird. Der Fall eines unendlichen kommutativen Ω über P, also A_Ω, folgt dann entweder indem man noch mit einem Zerfällungskörper erweitert, also vollen Matrizenring erhält, also Ring ohne Radikal, sodaß auch A_Ω ohne Radikal, also einfach da sein Zentrum Körper. Oder man überlegt, wenn Ω algebraisch über P, daß jedes zweiseitige Ideal aus A_Ω schon eine Basis in geeignetem A_S besitzt.

Sie sehen daß während im Fall, daß A nichtkommutativ und normal über P, es überhaupt keinen Unterschied macht, ob endlicher oder unendlicher Rang, hier ein Unterschied auftritt. Es liegt wohl daran daß zwangsläufig der Fall von Erweiterung

zweiter Art mit erledigt ist; es ist aber immer P *voller* Invariantenkörper gegenüber der Gruppe der inneren Automorphismen, unabhängig vom kommutativen Verhalten. Die Verbindung beider Resultate zeigt, daß A_K einfach bleibt, auch wenn K nicht normal, Zentrum von K unendlicher Rang, K unendlich über Zentrum.

Ich schicke Ihnen auch §1 und §2 mit, die Sie neulich aus prinzipiellen Gründen ablehnten, weil ich denke, es interessiert Sie wie glatt damit §4 und §5 herauskommt: ich denke es genügt bei der Lektüre §1 und §2 ohne Beweisführung nur nachzuschlagen. Vielleicht ändern Sie aber auch Ihre Stellung![4] Mit den Vertauschungssätzen in §5 ist natürlich im wesentlichen schon alles gemacht; es sind die von R. Brauer in einem seiner Crelle-Manuskripte gegebenen, nur daß er sich dort, da er kommutativ arbeitet, auf vollkommenes Zentrum beschränken muß.[5] An die Verallgemeinerung auf Unvollkommenes liegt mir an sich gar nichts; mir liegt nur an der nichtkommutativen Methode.[6]

Die Sachen sind ganz kurz bei van der Waerden II dargestellt; einiges, wie ein Teil der Rangrelationen aus §4, fehlte noch in der Ausarbeitung[7]; ich habe es erst von dort[8], wo es spezieller steht, übernommen. Den von Ihnen gewünschten Beweis finden Sie, stärker zusammengezogen – im Anschluß an eine frühere Vorlesung, wo ich allerdings es noch etwas komplizierter hatte – auch auf S. 175 von van der Waerden; vielleicht ist es Ihnen dort bequemer. Übergang zu unendlichem kommutativen in A_Ω steht auch da wie ich eben sehe.

An Frau Artin habe ich geschrieben da man hier im Institut mit *ihrem* Schreiben gute Erfahrungen gemacht hat; hoffentlich klappt es! Brandt schreibt heute auch daß er am 19. schlecht kann; was nichts für den 26. bedeutet.[9] Ich werde vermutlich lieber im Mai nach Halle fahren.

Beste Grüße und bald auf Wiedersehen[10],
Ihre Emmy Noether.

Den Durchschlag hätte ich gern gelegentlich zurück.

Anmerkungen zum Dokument vom 8.2.1932

[1]Diese Zeilen wurden von Noether anscheinend nach Fertigstellung des Briefes ganz oben zwischen Datum und Anrede geschrieben, weil sonst kein Platz mehr auf dem Blatt zu finden war. Es handelt sich nicht um einen Zusatz zu dem eigentlichen Text. Möglicherweise schließt Noether an die Diskussion mit Hasse über den Beweis des Lokal-Global-Prinzips an; vgl. die vorangegangene Postkarte vom 27. 1. 1932. Noether sieht offenbar einen Zusammenhang mit den Artinschen Führern, mit denen sie sich beschäftigt, seit sie von Hasse über den diesbezüglichen Brief von Artin informiert worden war. Vgl. die Briefe vom 10. 10. 1930 und vom 22. 8. 1931.

[2]Noether sagt nicht direkt, worum es sich handelt. Jedoch kann man das aus dem Zusammenhang entnehmen, nämlich um den Satz: *Ist A eine einfache Algebra mit Zentrum P und ist S irgendein Erweiterungskörper von P, so ist auch $A_S = A \otimes_{\mathsf{P}} S$ einfach.* Dieser Satz steht als „Folgerung aus dem Erweiterungssatz" in §4 der Noetherschen Arbeit „Nichtkommutative Algebra" [Noe33b] in der Mathematischen Zeitschrift 1933. Unter allen Arbeiten von Emmy Noether über nichtkommutative Systeme ist diese Arbeit vielleicht als die reifste und eindrucksvollste anzusehen (wenn es sich auch nur um die Klärung der Grundbegriffe der Algebrentheorie handelt). Zum Zeitpunkt der Abfassung des vorliegenden Briefes war die Arbeit aber noch nicht erschienen. Wie wir aus dem Brief erfahren, schickt Noether an Hasse einen Auszug aus dem bereits für

die Publikation fertiggestellten Teil des Manuskripts. Natürlich kannte Hasse diesen Satz, er wünschte aber einen „Strukturbeweis", wie Noether ihn nennt. Und zwar auch in dem Falle, in dem die Körpererweiterung $S|\mathsf{P}$ nicht endlich oder nicht separabel ist. (Statt „ nicht separabel" sagt Noether „von 2. Art".) Die Strukturaussage, die diesem Satz zugrundeliegt, besagt: *Jedes zweiseitige Ideal von A_S ist Erweiterungsideal eines zweiseitigen Ideals von A.*

[3]Hier lesen wir in reiner Form das für Emmy Noether typische Diktum, nämlich dass die nichtkommutative Algebra einfacher sei als die kommutative – jedenfalls wenn man als Grundkörper das Zentrum nimmt.

[4]Es ist unbekannt, weshalb Hasse die §1 und §2 „abgelehnt" hat. Vielleicht waren sie ihm zu allgemein, und er hatte sich die Sachen schon auf andere Weise überlegt. In seinem Jahrbuch-Referat der Noetherschen Arbeit [Noe33b] beschreibt Hasse diese beiden Paragraphen durch den Satz: „*Nach einer allgemeinen Einführung in die Theorie der Automorphismen, Moduln und Doppelmoduln wird zunächst unter ganz allgemeinen Voraussetzungen die Theorie der direkten und reziproken Darstellungen entwickelt.*"

[5]Gemeint ist die Brauersche Arbeit „Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern" in Band 166 (1932) des Crelleschen Journals [Bra32a].

[6]Vgl. Anmerkung 3.

[7]Es handelt sich um die von G. Köthe angefertigte Ausarbeitung der Noetherschen Vorlesung vom Sommer 1928, aus der die jetzt diskutierte Noethersche Arbeit entstanden ist. Noether erwähnt diese Ausarbeitung hier deshalb, weil Hasse ein Exemplar besaß und daraus die Theorie der Faktorensysteme gelernt hatte, wie Noether zu Beginn des Briefes sagt. – Übrigens: Die Theorie der Faktorensysteme findet sich in der Publikation nicht mehr. Offenbar wollte sie Noether in einem zweiten Teil publizieren, was aber zu ihren Lebzeiten nicht mehr erfolgte. In ihren Gesammelten Abhandlungen ist die Deuringsche Ausarbeitung der Vorlesung im Winter 1929/30 publiziert [Noe83]; dort finden sich in der Tat auch die Faktorensysteme.

[8]D. h. von van der Waerden, Moderne Algebra II, §119 und §128 (1. Auflage).

[9]Artin war eingeladen worden, in Göttingen eine Vorlesungsreihe über Klassenkörpertheorie zu halten. Diese Vorlesungen fanden vom 29. Februar bis 2. März 1932 statt. Offenbar geht es hier um die Vorbereitungen dazu. Aus dieser und der nächsten Postkarte geht hervor, dass diese berühmt gewordenen Göttinger Vorlesungen von Artin auf Betreiben Emmy Noethers veranstaltet worden sind. – Es sieht so aus, dass Artin sich zu einer Anfrage noch nicht selbst geäußert hatte, und dass sich Noether deshalb an Frau Artin gewendet hat. – Eine Ausarbeitung der Artinschen Göttinger Vorlesungen wurde von Olga Taussky-Todd angefertigt. Eine englische Übersetzung davon wurde in dem Buch von H. Cohn „A classical invitation to algebraic numbers and class fields" (1978) publiziert [Coh78].

[10]Hasse hatte vor, zu den Artinschen Vorlesungen nach Göttingen zu fahren; dort traf er u. a. auch Emmy Noether.

---

43 11.02.1932, Noether an Hasse, Postkarte

11. 2. 32

Lieber Herr Hasse!

Ich habe eben mit Artin (seine Frau ist noch in Berlin) telefoniert (oder vielmehr telefonieren lassen); wir haben festgelegt: 29. Februar, 1. und 2. März vormittags (d.h. Montag, Dienstag, Mittwoch der ersten Ferienwoche). Das ist Artin anscheinend lieber als das Wochenende zwischendrin; Landau, den ich zufällig traf, war höchst erfreut; und Herglotz sagte mir heute morgen auch daß ihm Semesterschluß lieber sei.

Nun hoffe ich nur, daß es für Sie nicht zu lästig wird; vielleicht tut Ihnen ja auch Haussner den Gefallen, auf 26. oder 27. zu schieben.[1]

Es ist sehr wahrscheinlich, daß ich jetzt doch zum 11. u. 20. nach Halle fahre; wie Brandt[2] mir schreibt, will Krull zweimal vortragen, außerdem Deuring über die Artin-Führer. Ich würde dann wohl über Zusammenhang von Idealklassen im kommutativen und hyperkomplexen sprechen; wenn es auch einstweilen nur Deutungen sind (Worte wie Sie sagen), glaube ich doch daß es zum Verständnis hilft. Übrigens kommt ein trivialer Hilfssatz heraus: Wenn u_R, u_S, u_T die Eigenschaft haben, durch Transformation Faktorensystem eins zu liefern, sind es symbolische $S-1$, $T-1$-te Potenzen (Verallgemeinerung von: aus $N(\mathfrak{a}) = (1)$ folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{S-1}$).[3]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 11.2.1932

[1]Haussner war Ordinarius in Jena. Wie es scheint, war Hasse von Haussner zu einem Vortrag in Jena eingeladen worden. Aber er zog es vor, zu den Artinschen Vorlesungen nach Göttingen zu fahren.

[2]Brandt war seit 1930 der Nachfolger von Hasse in Halle.

[3]Es handelt sich um Hilberts Satz 90 für Ideale, also um die Feststellung, dass die 1-Kohomologie der Idealgruppe trivial ist.

---

44 15.03.1932, Taussky an Hasse (mit Zusatz Noether)

Göttingen, 15. März 1932

Sehr verehrter Herr Professor,[1]

Fräulein Professor Noether machte uns eben darauf aufmerksam, dass in Ihrem Nachwort zu Hilberts algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten die historischen Angaben über die Hilbert-Dedekindsche Theorie des Galoisschen Zahlkörpers sich zu widersprechen scheinen, da einmal von den völlig neuartigen Entdeckungen Hilberts und dann von den früheren Untersuchungen von Frobenius die Rede ist. (Die betreffenden Stellen bei Frobenius und Dedekind sind die Einleitung zu der Arbeit von Frobenius über die Dichtigkeitssätze in den Sitzungsberichten der preuss[ischen] Ak[ademie] d[er] Wiss[enschaften] 1896, Bd. I, S. 689 und die Arbeit, bzw. Briefe Dedekinds in Werke Bd. I. S. 233 und Bd. II S. 414.)

Da wir noch eine Revision bekommen, liessen sich vielleicht noch kleine Änderungen anbringen, etwa die folgenden, drucktechnisch leicht möglichen:

I. Seite 529, Zeile 7 von unten das Wort „völlig“ zu streichen,

II. 533, in dem Absatz nach dem Artinschen Reziprozitätsgesetz die beiden Sätze dieses Absatzes zu vertauschen und in dem bisherigen ersten Satz etwa zu schreiben: „Die Existenz und eindeutige Bestimmtheit einer solchen Substitution S ist in der von Hilbert in 4. unabhängig von Dedekind und Frobenius entwickelten Theorie der Galoisschen Körper enthalten.“

Im voraus besten Dank und freundliche Grüsse

Olga Taussky

Lieber Herr Hasse! [2]

Daß ich als historischer Stänker auftrete, daran ist die Dedekind-Ausgabe schuld! [3] Der Brief ist aber nicht so offiziell – oder ultimativ – gemeint wie er aussieht!

Was mich störte war, daß Sie die *Verbindung von galoisscher Theorie und Idealtheorie* als das *Prinzipiell Neue* bei Hilbert hinstellen, während Dedekind daran (an der angegebenen Stelle[4] in Bd. I z.B.) doch zumindest soviel publiziert hatte – besessen hat er ja das ganz mit Ausnahme der Verzweigungsgruppen – daß Frobenius sich damit schon 1880 die Frobenius-Substitution konstruieren konnte (vergl. Einleitung zu Frobenius). Und der Dichtigkeitssatz von 1880 (wenn auch 1896 publiziert) ist doch gerade diese Verbindung! [5]

Formal rächt sich diese Ungenauigkeit bei Ihnen in dem oben von Frl. Taussky angegebenen Widerspruch!

Dabei will ich keineswegs verkennen, daß erst durch Hilbert diese Sachen für die Zahlentheoretiker völlig lebendig geworden sind – und daß Hilbert aller Wahrscheinlichkeit nach alles völlig unabhängig wiedergefunden hat.

Im übrigen sind vermutlich die anderen nicht solche Haarspalter wie ich, falls Sie alles beim Alten lassen wollen! [6]

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.

Mit dem Hauptgeschlechtssatz bin ich einstweilen noch nicht weiter gekommen; man muß jetzt erst einmal Brandt verstehen, im Sinn der Darstellung in Bereichen aus Idealen.[7]

Anmerkungen zum Dokument vom 15.3.1932

[1] Dieser Brief wurde von Olga Taussky mit Schreibmaschnine geschrieben, und Emmy Noether gab anschliessend einige handschriftliche Kommentare dazu. – Olga Taussky (später Taussky-Todd) war 1930 in Wien bei Furtwängler mit einer Arbeit über Klassenkörper promoviert. 1931/32 hatte sie eine Assistentenstelle in Göttingen inne und wurde beauftragt, bei der Herausgabe des ersten Bandes der Gesammelten Werke von Hilbert mitzuarbeiten. Es handelte sich um den Band über Zahlentheorie [Hil32]. Ihre Aufgabe war es, die zahlentheoretischen Arbeiten von Hilbert auf Fehler und Druckfehler durchzusehen, sowie die Korrekturen zu überprüfen. Dazu gehörte auch die Korrektur des Artikels von Hasse, in dem ein Gesamtüberblick über die

algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten Hilberts gegeben wurde; dieser Artikel [Has32e] findet sich am Schluss des ersten Bandes der Hilbertschen Werke.

[2] Die nachfolgenden Kommentare stammen von Emmy Noether.

[3] Emmy Noether hatte (zusammen mit Robert Fricke und Öystein Ore) die Gesammelten Mathematischen Werke von Dedekind [Ded32] herausgegeben.

[4] Siehe den vorstehenden Brief von Olga Taussky.

[5] Es ist merkwürdig, dass Noether nicht die Arbeit von Dedekind zitiert, in der er die sog. Dedekind-Hilbertsche Theorie darstellt (mit Ausnahme der Verzweigungsgruppen, wie auch Emmy Noether zugibt). Diese Arbeit ist in Band 2, Nr. XXIV der gesammelten Werke von Dedekind [Ded32] aufgenommen. Wahrscheinlich ging Noether davon aus, dass Hasse diese Arbeit von Dedekind kannte; durch die angegebenen Zitate wollte sie lediglich nachweisen, dass Dedekind die Resultate schon früher als Hilbert kannte, also die Hassesche Aussage über die „völlig neuartigen“ Entdeckungen Hilberts nicht ganz zutreffend sei.

[6] Hasse hat den Vorschlag zu Punkt I des Briefes von Olga Taussky akzeptiert: das Wort „völlig“ ist gestrichen worden. Zu Punkt II: Hasse hat zwar den ersten Satz in der von Olga Taussky angegebenen Weise umformuliert, dann aber davon Abstand genommen, die beiden Sätze zu vertauschen, d.h. er erwähnt zuerst Hilbert und dann erst Frobenius.

[7] Es ist nicht ganz klar, welche Arbeiten Brandts gemeint sind; die relevanten Arbeiten Brandts und Artins zu der Idealtheorie in nichtkommutativen Maximalordnungen liegen schon ein paar Jahre zurück. Vielleicht handelt es sich um die Galois-Kohomologie der Ideale, die Noether im September 1932 auf ihrem Vortrag bei der IMU-Konferenz in Zürich andeutete?

---

45 26.03.1932, Noether an Hasse

Göttingen, 26. 3. 1932

Lieber Herr Hasse!

Was ist Ihnen eingefallen mich so zu verwöhnen? Ich habe mich schrecklich gefreut! [1]

Jetzt habe ich auch Ihre Arbeit fertig gelesen und kann also richtig danken für Unfug und Ernstes! Das $m_{\mu,\nu}$-Silbenrätsel habe ich durch genaues Verfolgen aller Bruchstellen wirklich gelöst – und zum Teil verspeist! Auch die Rosenguirlande aus der schwarzroten α-Koalition hat gebührenden Eindruck gemacht, besonders da sie die „Arithmetikerin“ umrahmte, das höchste Lob das Sie austeilen können! [2]

Wie Sie es aber fertiggebracht haben in dieser kurzen Zeit[3] das hyperkomplexe Reziprozitätsgesetz auszuarbeiten, das ist mir ein Rätsel! Nun muß ich auch ordentlich voran machen um die nichtkommutative Widmung zu verdienen! Ich glaube aber daß Ihre Arbeit mir helfen wird; denn ich sehe dadurch schon wieder manches klarer! Vor allem die Rolle des Reziprozitätsgesetzes, die das Zerfallen der Algebren (α, Z, S) an den Primstellen $\mathfrak{p}$ der Einsklasse der zugehörigen Strahlklasseneinteilung zwingt – also an den „Divisoren“-Stellen $k_{\mathfrak{n}}$, wenn $\mathfrak{n}$ in der Einsklasse und $(\alpha) = \mathfrak{n}N(\mathfrak{C})$ – während das Zerfallen für die Verzweigungsstellen von Z definitorisch festgelegt ist durch $\alpha \equiv 1$ $(\mathfrak{f})$.[4] Ich glaube von da aus muß man zu einer vernünftigen Formulierung im allgemeinen kommen! Jedenfalls hat die Theorie tatsächlich ein ganz anderes Gesicht bekommen! [5]

Beim Literaturverzeichnis hätte ich gern noch die kleine Normennote von Deuring aus den Göttinger Nachrichten erwähnt. Denn das war zeitlich die *erste* Überlegung in dieser Richtung (März 1930), und sie hat mir persönlich sehr vorangeholfen, wenn sie auch jetzt im wesentlichen überholt ist und er sie spät publiziert hat. Zu meiner Überraschung sah ich, daß er damals (25. 3. 30) am Schluß seines Beweises schrieb: „Der Satz könnte bei einem direkten Aufbau der Normenresttheorie – der vielleicht zu einem vernünftigen Beweis des Reziprozitätsgesetzes nötig ist – eine Rolle spielen, für den Vertauschungssatz $(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}) = (\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{p}})$." Mit dem allgemeinen Invarianzsatz, anstelle seines speziellen, ist das doch Ihr jetziger Weg! [6]

Deuring läßt Sie übrigens fragen, ob er vielleicht leihweise für ein paar Wochen einen Durchschlag haben kann, für den hyperkomplexen Bericht? [7] (Ferienadresse Göttingen, Hospitalstr. 3a). Wenn nicht würde ich die Arbeit jetzt nur bei Blumenthal [8] anmelden – sie ist doch für die Annalen bestimmt? – und etwas später hinschicken, das würde zum Druck nichts schaden, wonach ich mich erkundigen werde.

Bei „Brandt" ist noch der Kissinger Vortrag anzugeben, Jahresber. 37 S. 5, 1928.[9] ~~S. 8 muß es etwas genauer heißen:~~[10] (Ich sehe Sie haben es so gefaßt daß man „irreduzible" Einbettung nicht braucht.) Wollen Sie S. 15 nicht genauer schreiben, bei den unendlichen Primstellen: Für $\mathfrak{p}$ reell, $e_\mathfrak{p} = 1$ oder $= 2$, je nachdem $\mathfrak{P}$ reell oder komplex; für $\mathfrak{p}$ komplex, stets $e_\mathfrak{p} = 1$. Ich kann es ja hineinschreiben.

Übrigens ist Ihr algebraischer Hilfssatz S. 10 (2.5) gerade ein Spezialfall desjenigen den ich zur allgemeinen Führerdefinition brauche. Ich spreche ihn so aus: „Sei $k \subset L \subset K$, L normal über k und K/L zyklisch. Ist dann neben K auch L Zerfällungskörper von A, so läßt sich ein auf K bezügliches Faktorensystem bei geeigneter Normierung zusammensetzen aus einem auf L bezüglichen und aus Einsen". In Ihrem Fall würde ich normieren: $u^m = \alpha w$; $w^s = 1$; $uw = wu$. Übrigens habe ich meinen Satz auch aus Albert herauspräpariert.[11]

Und jetzt nochmal herzlichen Dank! Sie scheinen es ja auch gewesen zu sein der den Geburtstag bei der Algebra bekannt gemacht hat! [12]

In herzlicher Freundschaft, Ihre Emmy Noether.

Bitte Korrektur der Algebren zurück (für Fitting oder ?) [13] Auch von Deuring.

Anmerkungen zum Dokument vom 26.3.1932

[1]Emmy Noether hatte am 23. 3. 1932 ihren 50. Geburtstag. Drei Tage danach bedankt sie sich nun bei Hasse für eine Geburtstagssendung.

[2]Wir werden wohl niemals Näheres über den „Unfug" in der Sendung erfahren, von dem Noether spricht, also das $m_{\mu,\nu}$-Silbenrätsel und die schwarzrote α-Koalition. Aber über den „Ernst", also das mitgeschickte Manuskript, das Hasse der „Arithmetikerin" zum Geburtstag gewidmet hatte, wissen wir Bescheid, denn es wurde in den Mathematischen Annalen 1933 publiziert (mit Eingangsdatum März 1932). Die Arbeit trägt den Titel: „*Die Struktur der R. Brauerschen*

Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper. Insbesondere Begründung der Theorie des Normenrestsymbols und die Herleitung des Reziprozitätsgesetzes mit nichtkommutativen Hilfsmitteln. Emmy Noether gewidmet zum 50. Geburtstag am 23.März 1932". Diese Arbeit [Has33b] – zusammen mit dem Züricher Vortrag von Emmy Noether im September 1932 – ist als der Höhepunkt der Entwicklung in der Kooperation Hasse-Noether anzusehen, die mit Noethers Postkarte vom 4. 10. 1927 begann und dann zur Strukturtheorie der Algebren über Zahlkörpern und ihren Zusammenhang mit der Klassenkörpertheorie führte. Noether hat die Bedeutung der Hasseschen Arbeit sofort gesehen. In den drei Tagen seit ihrem Geburtstag hat sie das Manuskript gelesen und sendet Hasse nun ihre Kommentare dazu.

[3]Noether meint die Zeit seit November 1931, d.h. seit der Fertigstellung der gemeinsamen Arbeit [BHN32] von Brauer-Hasse-Noether über das Lokal-Global-Prinzip für Algebren.

[4]Hier spricht Noether ein Detail im Hasseschen Beweis der Summenformel für die Invarianten einer einfachen Algebra an (Satz (6.53) von [Has33b]). Bei jenem Beweis wird nicht das volle Artinsche Reziprozitätsgesetz herangezogen, sondern nur das Reziprozitätsgesetz für zyklische Kreiskörper, das ziemlich elementar zu gewinnen ist. Die Leistung Hasses besteht darin, für den vorliegenden Zweck geeignete solche Kreiskörper zu konstruieren. (Beiläufig sei erwähnt, dass dazu derselbe elementar-zahlentheoretische Hilfssatz benutzt wird, den auch Artin zu seinem Beweis des Reziprozitätsgesetzes benutzte, um die Tschebotareffsche „Durchkreuzungsmethode" anwenden zu können.) Das volle Artinsche Reziprozitätsgesetz, jedenfalls dessen essentielle Kernaussage, kann dann umgekehrt aus der Summenformel für Algebren hergeleitet werden (Satz (6.71) von [Has33b]). Das ist der Grund dafür, dass Noether oben schreibt, Hasse habe das „hyperkomplexe Reziprozitätsgesetz" ausgearbeitet. – Es dürfte kein Zufall sein, dass Noether gerade das in Rede stehende Detail im Hasseschen Beweis anspricht. Wenn sie schreibt, dass man α so definieren muss, dass $\alpha \equiv 1$ modulo dem Führer $\mathfrak{f}$, dann erscheint das wie ein diskreter Hinweis darauf, dass Hasse eben dies an der betreffenden Stelle des Beweises *nicht* sagt, sondern es heißt dort nur, dass α prim zum Führer angenommen werden kann – obwohl die Kongruenzbedingung später im Beweis stillschweigend benutzt wird.

[5]Die wesentlichen Züge dieses „anderen Gesichts" der Klassenkörpertheorie sind die folgenden: *Erstens* konnte Hasse nunmehr die lokalen Invarianten einer einfachen Algebra *durch rein lokale Bestimmungsstücke* definieren und ihre fundamentalen Eigenschaften beweisen. Bislang war das nur mit Hilfe der globalen Klassenkörpertheorie gelungen. Der Weg zur lokalen Definition war ihm von Emmy Noether suggeriert worden, vgl. Brief vom 2. 6. 1931. Da die Hasse-Invariante einer lokalen Algebra eng mit dem Normenrestsymbol verknüpft ist, so gelang es damit auch, die *lokale Klassenkörpertheorie* zu begründen, ohne dass dazu das globale Reziprozitätsgesetz in Anspruch genommen zu werden brauchte (wie es in früheren Arbeiten Hasses getan werden musste).

Zweitens aber konnte Hasse nunmehr das globale Artinsche Reziprozitätsgesetz mit Hilfe der Summenformel für die Invarianten einer Algebra beweisen. (Siehe die vorangehende Fußnote 4.) Damit war ein Traum von Emmy Noether Wirklichkeit geworden. Sie hatte seit langem behauptet, dass die Theorie der nichtkommutativen Algebren von besonders einfachen Gesetzmäßigkeiten beherrscht sei, und dass diese folgerichtig zur Begründung der schwierigeren Gesetze der kommutativen Theorie algebraischer Zahlen eingesetzt werden könne.

In der Arbeit entwickelt Hasse die gesamte Theorie *ab ovo*, wobei allerdings die Beweise bereits bekannter Tatsachen hier nicht immer wiederholt werden, sondern auf die einschlägige Literatur vewiesen wird. Das Lokal-Global-Prinzip für Algebren wird hier jedoch noch einmal dargestellt, diesmal in der von Noether gewünschten Weise. (Vgl. Brief vom 14. 11. 1931.) Insgesamt ist die Arbeit als ein in sich geschlossener, großartiger Entwurf anzusehen.

[6]Noether hatte diese Arbeit ihres Schülers Deuring [Deu31b] schon einmal erwähnt, nämlich im Brief vom 22. 11. 1931. – Hasse hat den Vorschlag von Noether aufgenommen und die Deuringsche Arbeit in seiner Einleitung zitiert.

[7]Deuring arbeitete damals an dem Manuskript seines Ergebnis-Bandes [Deu35a] über Algebren, was Noether schon in ihrem früheren Brief vom 8. 11. 1932 berichtet hatte. In dem Band sollten die neuesten Ergebnisse mit berücksichtigt werden; daher war Deuring an dem Hasseschen Manuskript interessiert. In der Tat finden sich die wesentlichen Ergebnisse aus Hasses Arbeit [Has33b] im Deuringschen Ergebnis-Bericht wieder. – Übrigens: da hier von einem „Durchschlag" die Rede ist, kann gefolgert werden, dass das Manuskript mit Schreibmaschine geschrieben war. Die Zeiten, in denen Manuskripte handschriftlich zur Publikation vorgelegt wurden, scheinen also 1932 zu Ende

zu gehen.

[8]Blumenthal war der geschäftsführende Herausgeber der Mathematischen Annalen.

[9]Hasse hat dieses Zitat in sein Literaturverzeichnis aufgenommen: [Bra28a].

[10]Dieser Passus ist bei Noether durchgestrichen.

[11]Es handelt sich um den Satz (in der heutigen Terminologie), dass die Brauer-Gruppe von $L|k$ vermöge Inflation *injektiv* in die Brauer-Gruppe von $K|k$ eingebettet wird. Hier wird das im zyklischen Fall nachgerechnet. Die von Noether erwähnte Arbeit von Albert ist im American Journ. of Math. 1932 [Alb32] erschienen. Die Bemerkung von Noether zeigt, dass Alberts Arbeiten von ihr (und auch von Hasse) sorgfältig gelesen wurden. In einem Brief an Richard Brauer vom 2. 4. 1932 stellt Hasse fest, dass er den in Rede stehenden Satz sich „mühsam aus Alberts letzter mir in Korrektur vorliegender Arbeit herausdestilliert" hatte. Er zeigt sich überrascht, dass dieser Satz in Wahrheit eine einfache Folge aus §3 von Brauers alter Arbeit [Bra28b] ist, wie Brauer ihm mitgeteilt hatte. Offenbar hatte das Noether auch nicht gemerkt, denn auch sie bezieht sich in dem vorliegenden Brief auf Albert. In der publizierten Fassung seiner Arbeit hat dann Hasse am Schlusss des Abschnitts (2.5) einen Hinweis auf die Brauerschen Resultate angefügt.

[12]Außer den Algebraikern scheint niemand in Göttingen den Noetherschen Geburtstag zur Kenntnis genommen zu haben. Olga Taussky, die damals in Göttingen war, berichtet in ihren „Personal recollections of Emmy Noether" [TT81] wie folgt:

> „*Emmy had her 50th birthday in 1932 and told me about it. She commented that nobody in Göttingen had taken notice of it. But then she added:* I suppose it is a sign that 50 does not mean old."

Und Olga berichtet weiter:

> „*Outside of Göttingen, Emmy was greatly appreciated in her country... It was the academic year 1931-1932 and she was at the height of her power and proud of her achievements, knowing that her ideas were now being accepted.*"

Die Anerkennnung Emmy Noethers „außerhalb Göttingens" wird auch dadurch manifestiert, dass sie im Jahre 1932 in Leipzig den „Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der Mathematischen Wissenschaften" erhielt (zusammen mit Artin). Vgl. Postkarte vom 30. 11. 1932.

[13]Diese Zeilen sind offenbar nachträglich mit Bleistift eingetragen. Es scheint, dass Noether ein Korrekturexemplar des Deuringschen Ergebnisbandes „Algebren" [Deu35a], oder zumindest Teile davon, zur Information an Hasse mitgeschickt hatte. Aber auch andere sollten wohl den Text lesen, z. Bsp. Fitting (ein Doktorand von Noether); daher die Bitte um Rücksendung.

---

46 05.04.1932, Noether an Hasse

Breslau[1], Hobrechtufer 15 (bis 17.4.) 5. 4. 32

Lieber Herr Hasse!

Hier mit bestem Dank die Artin-Briefe zurück; etwas verspätet wegen Reise und weil ich mir die Hauptsachen herausschreiben wollte, was nicht mechanisch ging sondern doch mit Überlegungen verknüpft war.[2] Ganz sehe ich ja noch nicht durch; vor allem scheint mir die Sache mit den Verzweigungsstellen doch über das Zyklische hinauszugehen (vergl. S.3. unten, letzter Brief). Es ist wohl so, daß die Komposition der „Idealalgebren"[3] H (erster Brief, letzte Seite) nicht in die Brauersche Algebrengruppe an der Stelle $\mathfrak{p}$ übergeht, sondern daß beim Übergang vom Hauptideal zu Elementen (an der Verzweigungsstelle $\mathfrak{p}$) die Einheiten *wesentlich*

hineinspielen, sodaß statt der zyklischen Algebrengruppe die abelsche Faktorkommutatorgruppe auftritt; vielleicht wird die direkte Definition des verallgemeinerten Normenrestsymbols $\left(\frac{\alpha_{\sigma,\tau}, K}{\mathfrak{p}}\right)$ alles genau zeigen.[4] Auch diese Definition scheint mir an den Verzweigungsstellen die abelsche Gruppe zu berücksichtigen; oder haben Sie es anders überlegt? Hier werden Sie ja gerade anschließen wollen!

Ich halte es übrigens auch nicht für ausgeschlossen, daß die Artinschen Ansätze im Zyklischen ein stärkeres Zurückdrängen des Analytischen ermöglichen; aber auch das ist Zukunftsmusik![5] Deuring fiel die Tatsache auf, daß überall die Differenzen $h(z)$ auftreten (S. 2); das kommt daher, daß die a_σ eine verschränkte Darstellung der Gruppen bilden, daß also $a_1 \sim 1$. Normiert man $a_1 = 1$, so werden die m_σ^1 gleich Null, was bequem ist. Ob es sich hier nur um eine Trivialität handelt, oder um einen formalen Kern des Reziprozitätsgesetzes – daran dachte Deuring – kann ich noch nicht übersehen. Die verschränkte Darstellung durch die a_σ ist übrigens die durch die Gruppe H – die Idealalgebra – erzeugte „Verlagerung" der σ![6] Nun interessiert es mich was Sie aus den Sachen herauslesen.

Daß die Index-Rechnungen immer übersichtlicher werden, ist sehr schön![7]

Die Korrektur der amerikanischen Arbeit habe ich einem meiner Leute, ich glaube Wichmann, geliehen. Schwarz ist noch dafür interessiert; ich schicke sie Ihnen gelegentlich zum Ausbessern zu. Deuring sagte ich daß er seine Korrektur zurückschicken soll; hoffentlich vergißt er es nicht![8]

Ich sehe auch noch nicht, ob mein Hauptgeschlechtssatz stärker nichtkommutativ ist als Artin; bezweifle es aber.[9]

Ich glaube das Neue, was hinzukommen muß, ist Operatorisomorphie statt Gruppenisomorphie!

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 5.4.1932

[1]Wahrscheinlich besuchte Emmy Noether ihren Bruder Fritz, der damals Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule in Breslau war.

[2]Hasse hatte im März 1932 einen Briefwechsel mit Artin über Faktorensysteme; es ging um die Frage, ob man über die Faktorensysteme einen Zugang zu einer Klassenkörpertheorie für galoissche, nicht notwendig abelsche Körpererweiterungen erhalten kann. Im Hasse-Nachlass gibt es 4 Briefe von Artin an Hasse aus dieser Zeit. Es werden wohl diese Briefe gewesen sein, die Hasse an Emmy Noether geschickt hatte, und die sie nun zurückschickt. Im ganzen scheint die Bilanz, gemessen an den Erwartungen, negativ gewesen zu sein, auch Artin hatte schliesslich festgestellt, dass man eine ganz neue Idee braucht, um die Zerlegung von Primidealen im galoisschen Erweiterungskörper beschreiben zu können. Mit Faktorensystemen, so schreibt Artin, „*kommt einfach die alte Methode heraus, die Klassenkörpertheorie anzuwenden auf Unterkörper in bezug auf die der ganze Körper cyklisch ist.*"

[3]„Idealalgebren" sind Klassen äquivalenter Faktorensysteme in der Gruppe der Ideale. Alles was mit Faktorensystemen definiert ist, wird von Noether mangels einer anderen Terminologie als „Algebra" bezeichnet. Heute würden wir von 2-Kohomologieklassen der Gruppe der Ideale, aufgefasst als Modul über der Galoisgruppe, sprechen. – Im lokalen Fall, wo die Ideale eine unendliche zyklische Gruppe bilden auf der die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}$ trivial wirkt, ist die Gruppe der „Idealalgebren" nichts anderes als die Kohomologiegruppe $H^2(\mathfrak{Z}, \mathbb{Z})$ und diese ist isomorph zur

Charaktergruppe der Faktorkommutatorgruppe von $\mathfrak{Z}$, was heute wohlbekannt ist, aber damals von Artin explizit ausgerechnet werden musste. Im unverzweigten Falle ist $\mathfrak{Z}$ zyklisch und daher auch die Charaktergruppe, und diese wiederum ist isomorph zur Brauergruppe. Im verzweigten Falle treten jedoch andere Verhältnisse auf; hierauf spielt Noether an.

[4]Artin hatte eine Definition dieses „verallgemeinerten Normenrestsymbols" vorgeschlagen, dies jedoch noch nicht ausgeführt. Allerdings bemerkt er, dass im wesentlichen die von Hasse bereits definierten Invarianten einer Algebra dabei herauskommen.

[5]Für Hasse war das „Zurückdrängen des Analytischen" in der Klassenkörpertheorie kein Thema. Er strebte Methoden an, die es erlauben, die Beweise *durchsichtig und der Sache angemessen* zu führen; dazu gehörten für ihn durchaus auch Methoden der analytischen Zahlentheorie, wenn sie denn diese seine Kriterien erfüllen.

[6]Noether kommentiert hier eine Rechnung Artins, die wir heute als Anwendung des „Lemmas von Shapiro" in der Kohomologie bezeichnen würden.

[7]Es handelt sich um die Index-Rechnungen zum Beweis der zweiten fundamentalen Ungleichung der (globalen) Klassenkörpertheorie. Hasse hatte in seiner Widmungsarbeit [Has33b] für Noether erwähnt, dass es „neue Vereinfachungen von Chevalley und Herbrand" gebe, und er verweist dazu auf die Pariser Thèse 1932 von Chevalley, die zu dem damaligen Zeitpunkt noch nicht publiziert, aber unter den Fachleuten schon bekannt war und ausführlich diskutiert wurde. Z. Bsp. Artin hatte an Hasse in einem Brief vom 16. Juni 1931 geschrieben: „*Begeistert bin ich über die neuen ungeheuren Vereinfachungen der Klassenkörpertheorie, die von Herbrand und Chevalley stammen*". Die Chevalleysche Thèse [Che33b] erschien später in dem Journal of the Faculty of Science Tokyo, gleichzeitig mit einer darauf Bezug nehmenden Arbeit [Has34b] von Hasse selbst.

Es ist anzunehmen, dass Noether ihre Bemerkung über die Index-Rechnungen als Antwort auf eine entsprechende Information von Hasse geschrieben hat. Hierzu ist zu bemerken, dass zum Zeitpunkt dieses Briefes das Sommersemester 1932 gerade begonnen hatte; das war dasjenige Semester, in dem Hasse seine Vorlesung über Klassenkörpertheorie hielt, die ausgearbeitet wurde und dann als „Marburger Vorlesungen" [Has33d] weithin bekannt wurden (1967 in Buchform erschienen). Hasse hatte diese Vorlesung auf dem damals neuesten Stand konzipiert und u. a. auch die in Rede stehenden Index-Rechnungen berücksichtigt und weiter vereinfacht. Es ist wahrscheinlich, dass Hasse in seinen Briefen an Emmy Noether über seinen Plan der Vorlesung berichtet und dabei erwähnt hatte, dass die Index-Rechnungen jetzt übersichtlicher geworden waren. Und dass die Bemerkung im vorliegenden Brief die Antwort Noethers darauf ist.

[8]Hier handelt es sich wohl nicht um die große amerikanische Arbeit Hasses über zyklische Algebren [Has32d], denn für diese hatte Hasse die Korrekturfahnen niemals erhalten. Deshalb sah sich Hasse gezwungen, eine zusätzliche Note [Has32a] mit den fälligen Korrekturen zu publizieren; diese Note erschien im selben Band der Transactions of the AMS, wie die Arbeit [Has32d] selbst. Es erscheint wahrscheinlich, dass es sich im vorliegenden Zusammenhang um diese Note handelt.

[9]Noether war eingeladen worden, auf der Internationalen Mathematiker-Konferenz, die im September 1932 in Zürich stattfinden sollte, einen der Hauptvorträge zu halten. Sie hatte vor, über ihre „hyperkomplexe" (d.h. kohomologische) Verallgemeinerung des Hauptgeschlechtssatzes zu sprechen. Es scheint so, dass sie sich jetzt schon auf diesen Vortrag vorbereitet, und dass dies der Grund ist, weshalb der Hauptgeschlechtssatz in den Briefen dieser Zeit öfter auftritt. Der Satz ist publiziert in [Noe33a]. Wenn Noether fragt, ob dieser Satz „stärker nichtkommutativ" ist als das Ergebnis der Artinschen Rechnungen (die niemals publiziert wurden) so meint sie wahrscheinlich, ob er eine stärkere Aussage liefert über das Zerlegungsverhalten von Primidealen in galoisschen nicht-abelschen Erweiterungen. Aus heutiger Sicht sind wohl beide, sowohl der Noethersche Hauptgeschlechtssatz als auch das Ergebnis der Artinschen Rechnungen, im wesentlichen gleichbedeutend mit dem Hasseschen Lokal-Global-Prinzip für Algebren. Vgl. die in Fußnote 2 zitierte Bilanz von Artin.

47 14.04.1932, Noether an Hasse

Breslau (ab 18. 4. wieder in Göttingen), 14. 4. 32

Lieber Herr Hasse!

Ich schicke Ihnen beiliegend einen Brief in Ihrer Eigenschaft als Crelle-Redakteur. Nimmt Crelle noch solche Invarianten-Arbeiten auf?

Der Verfasser, Petri, war in alter Zeit – 1904/05 glaube ich – Assistent bei Jordan und meinem Vater und ein sehr tüchtiger Mensch der sich gut hätte habilitieren können. Er ging aber an die Schule, hat seitdem nur ein oder zwei Arbeiten über algebraische Funktionen publiziert, vor etwa 10 Jahren, um Bd. 90 der Math. Annalen herum; Klein interessierte sich sehr dafür. Weitergearbeitet an den alten Sachen hat er wohl immer.

Die Sache schließt sich an meine älteste Crelle-Arbeit (Dissertat[ion])[1] an; zwischen Bd. 130 und 140, etwa 137 oder 135 oder 136[2]. Die Kontrolle die er wünscht, kann ich allerdings nicht übernehmen; ich habe das symbolische Rechnen mit Stumpf und Stiel verlernt.[3] Ich glaube da wäre Weitzenböck der geeignetste; eventuell auch van der Waerden, der die Symbolik noch ganz beherrscht. Es fragt sich ja überhaupt, ob man das ganze nicht an Weitzenböck verweisen soll, wegen der Akademie-Aufnahme; an die Akademie-Abhandlung denkt Petri ja auch. Crelle ist nur wegen meiner alten, für mich verschollenen Arbeit.[4]

Also geben Sie mir bitte Bescheid und schicken Sie den Brief wieder zurück, zwecks Ausfindung eines Kontrollmenschen. Ich erinnere mich daß damals Petri auf alle einen starken Eindruck machte; ein Eigenbrödler war er wohl immer. Er hat übrigens noch einmal eine Arbeit über Körper aus Matrizen an Hensel für Crelle geschickt, sie aber später zur Umarbeitung auf Nimmerwiedersehn zurückgezogen.

Haben Sie Ihre weiteren Ferien mit den geplanten literarischen Tätigkeiten ausgefüllt?[5] Oder haben Faktorensysteme u.s.w. doch wieder stark gereizt? Was im Sinn der Operatorisomorphie hinzukommen muß, das ist wohl das Analogon für Ideale und Idealklassen zu Galoismoduln und Deuringschem Automorphismenmodul. Zu letzterem gehören alle Zwischenkörper, wie die galoissche Theorie zeigt; das erzählte ich Ihnen ja. Vielleicht ergibt sich hier einiges, wenn man versucht, den Zusammenhang zwischen meinem Führer zum Hauptgeschlechtssatz und den Artin-Führern herzustellen, welch letztere ja nach Deuring durch seine Automorphismenmoduln festgelegt sind.

Aber genug der Phantasie! Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 14.4.1932

[1]Die Dissertation [Noe08] von Emmy Noether hatte den Titel: „Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form".

[2]Es war Band 134.

[3]Die ersten Arbeiten von Emmy Noether beschäftigten sich mit dem symbolischen Rechnen in der Invariantentheorie, im Sinne von Paul Gordan.

[4]Im Crelleschen Journal ist keine Arbeit von Petri erschienen. Es erschien jedoch 1935 eine Arbeit von K. Petri in den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie München, mit dem Titel „Über die Diskriminanten ternärer Formen" [Pet35]. Die Arbeit wurde im Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik von Weitzenböck referiert, für das Zentralblatt für Mathematik von van der Waerden.

[5]Seit dem Besuch von Harold Davenport bei Hasse im Sommersemester 1931 las Hasse regelmässig englische Literatur, die ihm von seinem Freund Davenport empfohlen wurde. Hasse wollte damit seine Englisch-Kenntnisse aufbessern. Er nahm auch an literarischen Zirkeln in englischer Sprache teil; so berichtete er z.Bsp. am 15. 11. 1932 an Davenport: „*I attend to a course of Miss Diffené's on Translation and Essay Writing. It is quite amusing. We write essays on subjects suggested by A. Huxley's 'Those Barren Leaves'.*" Offenbar hatte Hasse darüber auch an Emmy Noether berichtet.

---

48 27.04.1932, Noether an Hasse, Postkarte

Stegemühlenweg 51, 27. 4. 32

Lieber Herr Hasse!

Ich weiß nicht, ob Sie gemerkt haben, daß aus den Sätzen von Köthe sofort die Klassenkörpertheorie im Kleinen für zykl[ische] Körper folgt, d.h. die Tatsache $(\alpha : \nu) = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} n_{\mathfrak{p}}$.[1] Und da Sie von Vorlesung[2] und Chevalley[3] schreiben, wollte ich Sie darauf aufmerksam machen! – Tatsächlich zeigt Köthe mit seinem Invariantensatz[4] ja direkt, daß im $\mathfrak{p}$-adischen die Gradbedingung auch hinreichend ist für Zerfällungskörper (wozu Sie die als bekannt angenommene Indexrelation $(\alpha_{\mathfrak{p}} : \nu_{\mathfrak{p}}) \leq n_{\mathfrak{p}}$ benutzten!) Das heißt also insbesondere: ein Körper $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ vom Grad $n_{\mathfrak{p}}$ erzeugt die volle zyklische Algebrenklassengruppe der Ordnung $n_{\mathfrak{p}}$; insbesondere wenn $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ zyklisch vom Grad $n_{\mathfrak{p}}$, so ist $n_{\mathfrak{p}}$ auch die Ordnung der Gruppe $\alpha_{\mathfrak{p}}/\nu_{\mathfrak{p}}$; w.z.b.w.

Ich wollte Köthe schreiben, daß er diese Folgerung noch mit aufnimmt; er kann sich ja auf mich berufen, oder haben Sie es ihm auch schon mitgeteilt? [5]

Ihre heute gekommene Matrizenumschreibung des Deuringschen Beweises ist tatsächlich sehr hübsch; überlegt man: $e^S = \sum z_i w_i^S = \sum z_i^S w_i$, mit z isomorph der zu w komplementären Basis, so ist es der alte Beweis, im wesentlichen wenigstens.[6] Ich glaube aber, daß Ihre Fassung bequem sein kann für die Identifizierung der hyperkompl[ex] definierten Führer mit den Artinschen, was Deuring ja erst im

Fall „ohne höhere Verzweigung" hat.[7] Meine Ansätze, die aufspalten ohne zu identifizieren, werden so übersichtlicher.

Am 6. trage ich nun wahrscheinlich in Halle vor!

Herzliche Grüße Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 27.4.1932

[1]Noether benutzt das auch von Hasse verwendete „gruppenstenographische Prinzip", wobei Gruppen mit demselben Symbol bezeichnet werden wie ihre Elemente. (Siehe z. Bsp. Hasse's Klassenkörperbericht, Teil Ia [Has27a], oder auch Hasses „Marburger Vorlesungen" [Has33d].) Ist demgemäß eine zyklische Erweiterung von algebraischen Zahlkörpern gegeben, so steht α für die Elemente $\neq 0$ des Grundkörpers und ν für diejenigen Elemente, die an den Stellen $\mathfrak{p}$ des Führers $\mathfrak{f}$ Normenreste aus dem Erweiterungskörper sind. Und $(\alpha : \nu)$ ist der Index der Gruppe der Normenreste in der multiplikativen Gruppe aller Elemente $\neq 0$ des Grundkörpers. Wegen der Unabhängigkeit der Bewertungen $\mathfrak{p}$ ist $(\alpha : \nu) = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}(\alpha_\mathfrak{p} : \nu_\mathfrak{p})$, wobei $\alpha_\mathfrak{p}$ die Elemente $\neq 0$ der $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterung des Grundkörpers bedeutet, und entsprechend $\nu_\mathfrak{p}$ die $\mathfrak{p}$-adische Normgruppe. Wenn Noether von dem „Umkehrsatz im Kleinen" spricht, so meint sie damit den „Normensatz im Kleinen", nämlich dass $(\alpha_\mathfrak{p} : \nu_\mathfrak{p})$ gleich dem Körpergrad $n_\mathfrak{p}$ ist, und das folgt, wie sie berichtet, aus den Resultaten von Köthe.

Es handelt sich um die Arbeit [Köt33] mit dem Titel „Erweiterung des Zentrums einfacher Algebren"; sie erschien in den Mathematischen Annalen im selben Band wie die Hassesche Widmungsarbeit [Has33b] für Emmy Noether. Zu dem Zeitpunkt dieses Briefes war die Köthesche Arbeit noch nicht erschienen, aber offenbar waren sowohl Noether als auch Hasse über die Ergebnisse informiert. – Gottfried Köthe (1905–1989) promovierte 1927 in Innsbruck und studierte 1928–1929 in Göttingen, hauptsächlich bei Emmy Noether. Später wandte er sich unter dem Einfluss von Toeplitz der Funktionalanalysis zu.

[2]Im Sommersemester 1932 hielt Hasse in Marburg seine Vorlesung über Klassenkörpertheorie, die später ausgearbeitet und publiziert wurde [Has33d]. Wir hatten das schon in den Anmerkungen zum Brief vom 5.4.1932 erwähnt.

[3]Chevalley hatte den nötigen Formalismus geliefert, um die lokale Klassenkörpertheorie vom zyklischen auf den allgemein abelschen Fall zu übertragen. Offenbar hatte Hasse, der mit Chevalley in Briefwechsel stand, Noether über dessen Ergebnisse informiert. – Die Arbeit [Che33a] erschien im Crelleschen Journal; sie wurde von Emmy Noether für das Zentralblatt referiert.

[4]Der Invariantensatz von Köthe besagt, dass sich (im Lokalen) die Hasse-Invariante einer einfachen zentralen Algebra bei Grundkörpererweiterung mit dem Körpergrad multipliziert.

[5]Offenbar hat Noether übersehen, dass der lokale Normensatz für zyklische Erweiterungen bereits in der Widmungsarbeit [Has33b] enthalten ist, die Hasse an Emmy Noether vor einem Monat zu ihrem Geburtstag geschickt hatte. Zum Beweis hatte Hasse auf die gemeinsame Arbeit von Brauer-Hasse-Noether [BHN32] verwiesen; dort findet sich die Behauptung in Satz 3 (der allein von Hasse stammt).

[6]In Hasses Tagebuch findet sich unter dem Datum „April 1932" eine Eintragung mit dem Titel: „Existenz einer regulären Basis für normale Erweiterungen 1. Art. (Aus einem hyperkomplexen Beweis von Deuring destilliert.)" Hierbei bedeutet „reguläre Basis" dasselbe wie „Normalbasis". Es handelt sich um Normalbasen für Körper-Erweiterungen, nicht um Ganzheits-Normalbasen. Der Beweis übersetzt die Überlegungen von Deuring in die Sprache der Matrizen. Der Deuringsche Beweis [Deu32] erschien in den Mathematischen Annalen mit dem Titel „Galoissche Theorie und Darstellungstheorie". Offenbar wollte Hasse für seine Vorlesung einen Beweis haben, der unabhängig von der Algebrentheorie funktioniert. Der im Tagebuch enthaltene Beweis stimmt nämlich mit dem Beweis überein, den Hasse in seine „Marburger Vorlesungen" [Has33d] im Zusammenhang mit den Index-Rechnungen aufgenommen hat. Wahrscheinlich ist es dieser Beweis, den Hasse an Emmy Noether geschickt hatte.

Der Hassesche Beweis funktioniert allerdings nur für unendlichen Grundkörper. In diesem Fall hatte übrigens auch Noether bereits einen von der Algebrentheorie unabhängigen Beweis gegeben, nämlich in ihrer Arbeit „Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung" im Hensel-Festband

des Crelleschen Journals [Noe32b]. Allerdings sagt Noether später in [Noe32a], dass ihr damaliger Beweis eine Lücke enthalte; in der Tat ist ihr Beweis sehr kurz gehalten (nur zwei Zeilen in einer Fußnote), läßt sich jedoch (wie uns F. Lorenz mitteilte) einwandfrei ausarbeiten. – Die Hassesche Tagebuch-Eintragung trägt den offenbar erst später hinzugekommenen Vermerk: *Siehe Hensel, Crelle 103 (1887).* Bei der Nachprüfung dieses Zitats stellten wir fest, dass Hensel im Jahre 1887 die Existenz von Normalbasen für Erweiterungen endlicher Körper – aufgefasst als Restklassenkörper von Zahlkörpern – bewiesen hatte. Vgl. [Hen87].

[7] Emmy Noether hat in ihrer Arbeit [Noe32b] im Falle einer zahm verzweigten Galois-Erweiterung zu jedem Charakter χ der Galoisgruppe gewisse Ideale Δ_χ definiert, und zwar mit Hilfe von Algebren (also „hyperkomplex“, wie sie sagt). Sie vermutete, dass die von ihr definierten Δ_χ mit den in [Art31] definierten Führern $\mathfrak{f}_\chi$ übereinstimmen. Sie konnte das jedoch nur in ganz speziellen Fällen beweisen. Erst sehr viel später konnte in [Frö83] die Noethersche Vermutung bewiesen werden. Wenn Noether schreibt, dass dies Deuring schon könne, dann scheint ein Irrtum vorzuliegen. Deuring hat das jedenfalls niemals publiziert.

---

49 02.05.1932, Noether an Hasse, Postkarte

Stegemühlenweg 51, 2. 05. 1932

Lieber Herr Hasse!

Sie haben mich gar nicht mißverstanden; ich habe nur, wie mir jetzt klar wird, einen alten Beweis von mir mit Ihrem verwechselt; das Manuskript hatte ich nicht mehr, das ist lange an Blumenthal geschickt.[1]

Ich hatte mir längst überlegt, daß aus $(\alpha_\mathfrak{p} : \nu_\mathfrak{p}) = n_\mathfrak{p}$[2] folgt, daß im Kleinen jeder zykl[ische] Körper in eine Divisionsalgebra einbettbar ist[3]; und daß man die Klassenkörpertheorie im Kleinen so hyperkomplex aussprechen kann. Vielleicht erinnern Sie sich, daß ich Sie von Frankfurt aus fragte, ob Sie nicht mit Ihren Methoden – Sie hatten mir gerade das Schiefkörpermanuskript geschickt – $(\alpha_\mathfrak{p} : \nu_\mathfrak{p}) = n_\mathfrak{p}$ direkt hyperkomplex beweisen könnten. Das konnten Sie damals aber nicht.[4]

Als ich nun Köthe[5] in die Hand bekam, fiel mir als erstes auf, daß jetzt diese alte Frage ja beantwortet ist. Bei Ihnen hatte ich drüber weggelesen; oder was wahrscheinlicher ist, ich dachte an meinen alten Beweis[6] und habe bei Ihnen im wesentlichen überflogen.

Vielleicht machen Sie in der Korrektur an dieser Stelle einen kurzen Hinweis[7]; mir wird jetzt auch erst eine Bemerkung in einem Ihrer letzten Briefe klar, daß $(\alpha : \nu) = \prod n_\mathfrak{p}$ hyperkompl[ex] erledigt ist, und nur die übrigen Indexberechnungen bleiben. Das verstand ich nicht! Ich habe also jedenfalls meine mathematisch-historischen Kenntnisse durch diese Korrespondenz erweitert![8]

An Blumenthal will ich wegen rascher Korrekturen schreiben. In der neuen Wohnung müssen Sie bald einmal Gast sein: Math. Ann. Bd. 1–105 und Crelle Bd. 60–167 stehen im Bibliotheks-Fremdenzimmer zur Verfügung![9]

Herzlichst, Ihre Emmy Noether

Anmerkungen zum Dokument vom 2.5.1932

[1]Offenbar hatte Hasse Einspruch erhoben gegen Noethers Urteil auf der vorangegangenen Postkarte vom 27. 4. 1932, dass erst Köthe den lokalen Normensatz bewiesen habe. Der von Noether angesprochene Satz stand ja mit Beweis in der Widmungsarbeit von Hasse für Emmy Noether [Has33b], die er ihr Ende März geschickt hatte. Nun gibt Noether zu, dass Sie die betreffende Stelle nicht genau gelesen hatte; gleichzeitig teilt sie jedoch mit, dass sie sich selbst schon seit längerem damit beschäftigt hat.

[2]Zu dieser gruppentheoretischen Bezeichnungsweise siehe die Anmerkungen zur Postkarte vom 27. 4. 1932.

[3]Gemeint ist: Jede zyklische Körpererweiterung eines $\mathfrak{p}$-adischen Körpers $K_\mathfrak{p}$ ist einbettbar als maximaler kommutativer Teilkörper in eine Divisionsalgebra, deren Zentrum $K_\mathfrak{p}$ ist.

[4]Vgl. Noethers Postkarte vom 25. 6. 1930.

[5]Gemeint ist dessen Manuskript.

[6]Es gibt einen Brief von Noether an Chevalley, datiert 12.12.1931, in dem sie schreibt, dass sie sich diesen Beweis „*anläßlich ihres diesjährigen Seminars (Klassenkörpertheorie im Kleinen usw.)*“ überlegt habe. Dazu schreibt sie: „*es folgt unmittelbar aus Hasse, Göttinger Nachrichten 1931*“.

[7]In der Arbeit von Hasse in den Mathematischen Annalen [Has33b] (der Widmungsarbeit) steht jetzt an der betr. Stelle, nämlich bei Satz (5.2), ein Hinweis auf Köthe. Interessant ist, dass Hasse sein Zitat wie folgt formuliert: „*Den Beweis siehe in Hasse* [9] *oder besser in Köthe* [1]“. Dabei ist [9] die gemeinsame Arbeit Brauer-Hasse-Noether aus dem Crelleschen Journal [BHN32], während [1] eben die in Rede stehende Arbeit [Köt33] bedeutet, die gleich im Anschluss an die Hassesche Arbeit in den Mathematischen Annalen erschien. Bei der Durchsicht der Kötheschen Arbeit fällt auf, dass er sich häufig auf die voranstehende Arbeit von Hasse bezieht und auch explizit sagt, dass seine Arbeit auf den von Hasse entwickelten Methoden beruht. Ferner bedankt er sich in einer Fußnote bei Hasse „für viele Ratschläge bei der Abfassung dieser Note.“ Hasse hatte also wesentlichen Einfluss auf die Abfassung der Kötheschen Arbeit genommen.

[8]In den Marburger Vorlesungen [Has33d] wird übrigens dieser Normenrestsatz *nicht* hyperkomplex bewiesen, also *nicht* unter Benutzung der Algebrentheorie. Stattdessen wird das „Herbrandsche Lemma“ (über die Kohomologie zyklischer Gruppen) herangezogen. Die Algebrentheorie kommt in den Marburger Vorlesungen nicht vor.

[9]In dem Bibliotheks-Fremdenzimmer der neuen Wohnung wurden gelegentlich auch Seminare abgehalten. In dieser Wohnung konnte Noether nicht viel länger als ein Jahr leben; danach war sie zur Emigration gezwungen.

---

50 03.06.1932, Noether an Hasse

Göttingen, 2./3. 6. 1932

Lieber Herr Hasse!

Ihr hübscher Satz macht mir viel Vergnügen; vor allem aber die Tatsache, daß damit im Kleinen der Übergang vom zyklischen zum abelschen geht. Damit wird doch vielleicht die Rolle der Normen im abelschen geklärt, was ja durch Faktorensyst[eme] allein nicht geht.[1] Können Sie mir leihweise die Mitteilung von Chevalley schicken? Sie bekommen sie bald wieder![2]

Ich kann den Satz, den ich mir selbst nicht überlegt hatte, mit verschränkter Darstellung beweisen und verallgemeinern (S. 190 Ihrer amerikanischen Arbeit); mit den u_S als Basis des Darstellungsmoduls.[3] So hatte ich mir auch die Artinschen

Beweise zurechtgelegt; habe ich Ihnen das nicht von Breslau aus geschrieben oder angedeutet? Übrigens hat mir R. Brauer schon vor Jahren erzählt, daß man $A^n \sim 1$ aus den Assoziativrelationen folgern kann („zuerst“ von Artin bemerkt, stimmt also nicht); es steht in einer der jetzt erscheinenden Crelle-Arbeiten.[4]

Die verschränkte Darstellung ist deshalb einfacher, weil die Assoziativrelationen in der trivialen Form „$(u_S u_R)u_T = u_S(u_R u_T)$“ benutzt werden, um den Modul als Darstellungsmodul zu charakterisieren, nicht in der komplizierten auf Faktorensysteme umgeschriebenen. Sonst läuft alles Ihrem Beweis parallel.[5]

Sei also: $A = (KL \divideontimes \mathfrak{G}; a, b, c)$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$.

Ich betrachte die Reihe der verschränkten Darstellungen und „verallgemeinerten“ verschr[änkten] Darstellungen mit $\mathfrak{r} = (\ldots, u_R, \ldots)$, wo R alle Elemente S aus $\mathfrak{S}$ durchläuft.

1) $u_S u_{\overline{S}} = u_{S\overline{S}} a_{S,\overline{S}}$;
$\mathfrak{r} u_S = \mathfrak{r}\big(a_{R,S}\big) P_S$, wo P_S die Permutation $R \to RS$ bedeutet.
$\mathfrak{r} u_S u_{\overline{S}} = \mathfrak{r}\big(a_{R,\overline{S}}\big) P_{\overline{S}}\big(a_{R,S}\big) P_S = \mathfrak{r} u_{S\overline{S}} a_{S,\overline{S}} = \mathfrak{r}(a_{R,S\overline{S}}) P_{S\overline{S}} a_{S,\overline{S}}$;
also durch Übergang zu Determinanten (das ist hier rein multiplikativ, also auch im Artinschen Fall möglich, wo die $a_{S,\overline{S}}$ Ideale; Schursche Umformung der Hauptidealbedingung):
$a^n_{S,\overline{S}} = A_{\overline{S}} A_S^{\overline{S}} / A_{S\overline{S}}$ mit $A_S = \prod_R (a_{R,S})$;
also $a^n_{S,\overline{S}} \sim 1$.

2) $u_S u_T = u_T u_S b_{S,T}$ (die Reziproken Ihrer $b_{S,T}$, was bequemer ist)

α) $\mathfrak{r} u_T = u_T \mathfrak{r}(b_{R,T})$;
β) $\mathfrak{r} u_T u_S = u_T \mathfrak{r}(b_{R,T}) u_S = u_T \mathfrak{r} u_S (b^S_{R,T}) = u_T \mathfrak{r}(a_{R,S}) P_S (b^S_{R,T})$;
andererseits
γ) $= \mathfrak{r} u_S u_T b^{-1}_{S,T} = \mathfrak{r}(a_{R,S}) P_S u_T b^{-1}_{S,T} = \mathfrak{r} u_T (a^T_{R,S}) P_S b^{-1}_{S,T}$
$= u_T \mathfrak{r}(b_{R,T})(a^T_{R,S}) P_S b^{-1}_{S,T}$;
somit durch Übergang zur Determinante (rein multiplikativ):
$b^n_{S,T} = B_T^{1-S} A_S^{T-1} \quad$ mit $B_T = \prod_R b_{R,T}$.

3) $u_T u_{T^*} = u_{TT^*} c_{T,T^*}$. Unter Benutzung von 2)$\alpha$) (und 1) kommt:
$\mathfrak{r} u_T u_{T^*} = u_T \mathfrak{r}(b_{R,T}) u_{T^*} = u_T u_{T^*} \mathfrak{r}(b_{R,T^*})(b^{T^*}_{R,T})$
$\qquad = u_{TT^*} c_{T,T^*} \mathfrak{r}(b_{R,T^*})(b^{T^*}_{R,T}) = u_{TT^*} \mathfrak{r}(c^R_{T,T^*})(b_{R,T^*})(b^{T^*}_{R,T})$;
anderseits
$\mathfrak{r} u_{TT^*} c_{T,T^*} = u_{TT^*} \mathfrak{r}(b_{R,TT^*}) c_{T,T^*}$, somit Determin[anten-]Übergang:
$c^n_{T,T^*} = B_{T^*} B_T^{T^*} / B_{TT^*} \cdot C_{T,T^*} \quad$ mit $C_{T,T^*} = \prod_R (c^R_{T,T^*})$.

Setzt man also: $A^n = (u_S, u_T, KL, a^n, b^n, c^n)$ und weiter: $U_S = \overline{U}_S A_S$; $U_T = \overline{U}_T B_T$, so kommt: $A^n = (\overline{U}_S, \overline{U}_T; KL, 1, 1, C_{T,T^*})$, w.z.b.w.

Der Beweis hat den Vorteil, sich fast ungeändert auf den allgemeineren Fall zu übertragen, wo es sich um galoisschen Unterkörper L von K (anstelle von KL gesetzt) handelt.[6]

Sei nämlich L zum Normalteiler $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ gehörig; sei gesetzt: $\mathfrak{G} = \sum_T T\mathfrak{S} = \sum_T \mathfrak{S}T$ (mit T Repräsentanten d. Restklassen); dann gehen die definierenden Relationen aus 1), 2), 3) über in

1′) $u_S u_{\overline{S}} = u_{S\overline{S}}$;
2′) $u_S u_T = u_T u_{S_T} b_{S,T}$, wo $S_T = T^{-1}ST$;
3′) $u_T u_{T^*} = u_{(TT^*)} u_{S_{T,T^*}}$, wo (TT^*) den Repräsentanten von $TT^*\mathfrak{S}$ bedeutet, also $TT^* = (TT^*)S_{T,T^*}$.
4′) $u_{TS} = u_T u_S$ (immer mögliche Normierung), also nach 3′): $u_T u_{T^*} = u_{TT^*} c_{T,T^*}$!

Jetzt bleibt Teil 1) des Beweises wörtlich erhalten, bei Teil 2) wird $b_{R,T}$ durch $(b_{R,T})P_T$ ersetzt, wo P_T die Permutation $R \longmapsto T^{-1}RT$ bedeutet; bei Determinantenbildung hebt sich das im Zähler und Nenner auf; Teil 2) bleibt also auch erhalten.
Bei Teil 3) kommt erst die Bemerkung, daß sich die den Relationen 2′) entsprechenden für jedes Element D aus $\mathfrak{G}$ berechnen lassen:

$\overline{2}$′) $u_S u_D = u_D u_S b_{S,D}$;

man hat nur $D = \overline{T} \cdot \overline{S}$ mit geeigneten $\overline{T}$ und $\overline{S}$ zu setzen, was eindeutig ist; dann ergibt sich $b_{S,D}$ eindeutig: und es kommt, entsprechend 2) oben (denn D kann genauso gut als Repräsentant gewählt werden wie $\overline{T}$):

$$b^n_{S,D} = B_D^{1-S} A_S^{D-1} \qquad \text{mit} \qquad B_D = \prod_R b_{R,D}.$$

Jetzt bleibt aber 3′), unter Zugrundelegung von $u_T u_{T^*} = u_{TT^*} c_{T,T^*}$, bis auf zusätzliche, sich bei Determinantenbildung forthebende Permutationsmatrizen erhalten; also gilt tatsächlich:

$$A^n = (L, \mathfrak{S}, \prod_R c^R_{T,T^*});$$

da bei Einführung von $U_S = \overline{U}_S A_S$, $U_T = \overline{U}_T B_T$, allgem. $U_{TS} = \overline{U}_{TS} B_{TS}$ alle $a^n_{S,\overline{S}}$ und $b^n_{S,D}$ mit beliebigem D sich in assoziierte 1 verwandeln; woraus nach allgemeinen – nicht auf direkte Produkte beschränkten Sätzen die Abspaltung des Einsfaktors folgt (es sind die Sätze, die ich zur Führerbestimmung verwende, die wohl irrational schon bei R. Brauer stehen; Ztschr. 29 glaube ich). Die neuen U_{TS} sind dabei für $T \neq E$, $S \neq E$ im allgemeinen nicht mehr normiert, was natürlich nichts ausmacht; ich blieb aber erst daran hängen.

Ich halte es nicht für ausgeschlossen daß man vermöge dieser Verallgemeinerungen von der zykl[ischen] Klassenkörperth[eorie] im Kleinen auf das Verhalten der auflösbaren $\mathfrak{p}$-adischen Körper schließen kann, also auf das Verhalten der galoisschen Körper im Kleinen, wenn auch wahrscheinlich nur unvollständig. Deshalb interessiert mich natürlich der Übergang von Chevalley![7]

Weiter scheint mir die Vereinfachung durch die verschränkte Darstellung es nahe zu legen, auch bei der Erweiterung von Gruppen, bezw. beim Hauptidealsatz, mit verschränkter Darstellung der Gruppen durch den Normalteiler, statt mit den unübersichtlichen Assoziativrelationen zu arbeiten.[8] Vielleicht bekomme ich einmal jemand dazu!

Einem noch nicht sehr selbständigen Studenten, der sich einarbeiten wollte, habe ich vorgeschlagen, das verschränkte Produkt bei nicht galoisschem Zerfällungskörper einmal explizit anzugeben, durch Einbettung in den zugehörigen galoisschen und Abspalten einer Eins-Algebra. Ich sehe ziemlich wie das laufen muß, hoffe daß er durchhält; andere haben es aufgegeben, da wußte ich aber selbst nichts.[9]

Im übrigen habe ich anläßlich der Ausarbeitung meines Züricher Vortrags[10] einmal Gauß gelesen. Es wurde behauptet, daß ein halbwegs gebildeter Mathematiker den Gaußschen Hauptgeschlechtssatz kennt, aber nur Ausnahmemenschen den der Klassenkörpertheorie. Ob das stimmt, weiß ich nicht – meine Kenntnisse gingen in umgekehrter Reihenfolge – aber jedenfalls habe ich in bezug auf Auffassung allerhand von Gauß gelernt; vor allem daß es gut ist den Nachweis, daß die durch Faktorensysteme bestimmte Klasseneinteilung eine Strahlkl[assen]-Einteilung ist, an den Schluß zu stellen; der Übergang meiner Fassung zu der Gaußschen geht nämlich unabhängig davon direkt, erst die Spezialisierung auf die Klassenkörpertheorie braucht den Führer. Was ich mache, ist die Verallgemeinerung der Definition der Geschlechter durch Charaktere.

Wie ich höre sind Sie bei der Math[ematischen] Gesellschaft vorgemeldet. Ich rechne also sicher damit daß Sie diesen Sommer kommen.[11] Ich habe Anfang Mai in Halle vorgetragen; war dann noch in Leipzig. Deuring hat neulich in Erlangen vorgetragen; außerdem in Halle gleichzeitig mit mir.[12]

Also auf Wiedersehen und beste Grüße!

Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 3.6.1932

[1]In dem Tagebuch von Hasse findet sich unter der Datumsangabe „Mai 1932“ ein Eintrag mit dem Titel: „*Ein Satz über verschränkte Produkte.*“ Der dort bewiesene Satz stimmt überein mit demjenigen Satz, den Noether weiter unten beweist. Es ist also anzunehmen, dass Hasse diesen Satz an Noether geschickt hatte, und dass Noether nun ihre Version des Beweises mitteilt. Es handelt sich um einen Hilfssatz über Faktorensysteme, der zum Aufbau der lokalen Klassenkörpertheorie benutzt wurde. Hasse hatte in seiner Annalenarbeit [Has33b], welche er Noether zum 50. Geburtstag am 23. März 1932 gewidmet hatte, das Normsymbol mit Hilfe von Invarianten von Algebren definiert, jedoch nur für *zyklische* Erweiterungen. Für diese konnte er mit Hilfe des Normsymbols nachweisen, dass die Normfaktorgruppe isomorph auf die Galoisgruppe abgebildet wird. Es geht jetzt darum, ausgehend von dem zyklischen Fall auch beliebige abelsche Erweiterungen zu behandeln. Das meint Noether, wenn sie schreibt, dass dadurch „die Rolle der Normen im abelschen geklärt“ werde. Vgl. Anmerkung 11 zum Brief vom 25.6.1930.

[2]In dem Nachlass von Hasse findet sich unter dem Datum vom 12. Mai 1932 ein Brief von Chevalley in dem sich ebenfalls eine Mitteilung über den in Rede stehenden Satz befindet. Chevalley schreibt dazu: „*J'ai eu la même idée que vous en ce qui concerne les systèmes de facteurs.*“ Es scheint also, dass Hasse und Chevalley diesen Satz gleichzeitig gefunden hatten. Offenbar will Noether zusätzlich zum Hasseschen Beweis auch den Beweis von Chevalley sehen. Der Satz findet sich dann (als „Lemme 5“) in der Arbeit von Chevalley im Crelleschen Journal [Che33a]. Übrigens verweist Hasse in seiner Tagebucheintragung noch auf einen späteren Eintrag, datiert November 1934, in dem er einen besonders einfachen Beweis dieses Satzes, der von Witt

stammt, notiert. Der Wittsche Beweis wurde dann ebenfalls im Crelleschen Journal publiziert [Wit35b].

[3]Der Verweis auf die amerikanische Arbeit von Hasse [Has32d] bedeutet nur, dass Noether dieselbe Methode anwendet, die dort auch von Hasse angewandt wird.

[4]Es handelt sich um den Satz, dass die n-te Potenz eines Faktorensystems zerfällt, wenn n die Ordnung der zugrundeliegenden Gruppe G ist. Das wird von Artin in einem Brief an Hasse (9. 3. 1932) als Nebenergebnis vorgerechnet; da Hasse die Artinschen Briefe an Noether geschickt hatte, so war Noether darüber informiert. Für Algebren war der Satz tatsächlich schon lange bekannt. Die Artinschen Rechnungen sind jedoch für Faktorensysteme in einem beliebigen G-Modul gültig: das hatte wohl Hasse gemeint, als er schrieb, dass dies zuerst von Artin bemerkt wurde. – Wir sehen auch an diesem Beispiel das erwachende Bewusstsein für die formalen Regeln der Kohomologietheorie.

[5]Um die folgenden Rechnungen verständlich zu machen, seien einige Erläuterungen vorangestellt: Gegeben seien zwei linear disjunkte Galois-Erweiterungen $K|k$, $L|k$ eines gemeinsamen Grundkörpers k (der bei Noether nicht gesondert benannt wird). Die Galoisgruppen seien $\mathfrak{S}$ bezw. $\mathfrak{T}$. Die Galoisgruppe des Kompositums KL ist dann $\mathfrak{G} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$. Man betrachte eine Algebra A, die gegeben ist als verschränktes Produkt von KL mit $\mathfrak{G}$. Das Faktorensystem wird mit a, b, c bezeichnet, wobei a aus denjenigen Faktoren a_{S,S^*} besteht, deren Indizes S, S^* in $\mathfrak{S}$ liegen, also die Restriktion des Faktorensystems auf die Untergruppe $\mathfrak{S}$. Entsprechend ist c die Restriktion auf $\mathfrak{T}$, und b besteht aus den „gemischten“ Faktoren $b_{S,T}$, $b_{T,S}$ mit $S \in \mathfrak{S}$ und $T \in \mathfrak{T}$. Sei n die Ordnung von $\mathfrak{S}$. Der zu beweisende Satz besagt nun, dass A^n ähnlich ist zu einer Algebra B, welche verschränktes Produkt von $L|k$ mit $\mathfrak{T}$ mit dem Faktorensystem $c^{N_\mathfrak{S}}$ ist, wobei $N_\mathfrak{S} = \sum_{S\in\mathfrak{S}} S$ den Normoperator $KL \to L$ bedeutet.

Dieser Satz ist also das bereits in Fußnote 2 zitierte „Lemme 5“ von Chevalley. Es wird in Chevalley's Arbeit [Che33a] benutzt um das Hassesche Normsymbol für beliebige abelsche Erweiterungen eines lokalen Körpers zu definieren, ausgehend von der Hasseschen Definition in [Has33b] für zyklische Erweiterungen. Damit ergibt sich dann die lokale Klassenkörpertheorie, so wie es Noether vorausgesehen hatte.

[6]Diese Verallgemeinerung stimmt so nicht; offenbar wurde Noether von Hasse darauf aufmerksam gemacht, und sie hat das dann in ihrer nächsten Postkarte vom 24. 6. 32 zurückgezogen. – Heute wissen wir aus der Kohomologietheorie folgendes: Ist $L|k$ eine Teilerweiterung der Galois-Erweiterung $K|k$, so liefert die Verlagerung eine Abbildung ver: $H^2(K|L) \to H^2(K|k)$. Verbindet man sie mit der Restriktionsabbildung res: $H^2(K|k) \to H^2(K|L)$ so gilt: ver $\circ$ res $= n$ (Multiplikation mit n, bezw. Potenzierung mit n bei multiplikativer Schreibweise). Im Spezialfall aber, wenn $\mathfrak{S}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist und $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{S}$ zerfällt (z.Bsp. wenn $\mathfrak{S}$ direkter Faktor von $\mathfrak{G}$ ist), dann lässt sich die Verlagerungsabbildung als „Norm“ darstellen, wie es Noether tut.

[7]Vgl. Anmerkung 2.

[8]Jedes Faktorensystem definiert eine Gruppenerweiterung. Anscheinend ist es das, was Noether im Auge hat, wenn sie von einer „verschränkten Darstellung“ spricht.

[9]Es handelt sich um den Studenten Werner Vorbeck. Er hat 1935 in Göttingen promoviert mit einer Arbeit mit dem Titel „Nichtgaloissche Zerfällungskörper einfacher Systeme“. Zu dem damaligen Zeitpunkt war Noether bereits aus Göttingen vertrieben, daher agierte F. K. Schmidt formal als Referent. Er stützte sich dabei auf ein Gutachten, das ihm Noether aus USA geschickt hatte. Obwohl die Arbeit als für eine Promotion ausreichend befunden wurde, scheint Emmy Noether nicht sehr davon begeistert gewesen zu sein, offenbar hatte der Kandidat das vorgegebene Ziel nicht zu ihrer vollen Zufriedenheit erreicht. Die Arbeit wurde zwar in dem „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ referiert, jedoch nicht in einer mathematischen Zeitschrift publiziert. Das Thema geriet in Vergessenheit, bis Amitsur die heute sogenannte „Amitsur-Kohomologie“ einführte und auf Algebren anwendete.

[10]Emmy Noether war eingeladen worden, auf der Züricher Tagung der Internationalen Mathematischen Union im September 1932 einen Hauptvortrag zu halten. Ihr Vortrag hatte den Titel: „Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie“ [Noe32a].

[11]Hasse trug zwar im Sommer in Göttingen vor, jedoch nicht in der Mathematischen Gesellschaft sondern im Seminar von Emmy Noether. Erst später, nämlich im Januar 1933, kam ein Vortrag von Hasse in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft zustande.

[12]In Halle wirkte seit 1930 Heinrich Brandt, auf den die „Brandtschen Gruppoide“ zurückgehen;

sie dienen zur Beschreibung der Idealtheorie in den Maximalordnungen einer einfachen Algebra. In Leipzig wirkte van der Waerden, mit dem Noether in engem Kontakt stand; van der Waerdens Assistent war damals Deuring (Noethers „Lieblingsschüler"). In Erlangen waren Wolfgang Krull und F. K. Schmidt. – Über Noethers Vorträge in Halle und ihre darauf bezügliche Korrespondenz mit Brandt wird in [Jen86] berichtet.

---

51 Juni 1932, Noether an Hasse, Postkarte

ohne Datum[1]

Lieber Herr Hasse!

Ich habe tatsächlich an der betreffenden Stelle falsch geschlossen, und es bleibt nur der wenig interessante Satz übrig, daß $A^n \sim (L, [?])$ (L Inv.körper von $\mathfrak{S}$), der im Falle des direkten Produkts ($S_0 = E$) in Ihren Satz übergeht ($\alpha_{S_0} = 1$, $\beta_{T_0}^{S_0} = \beta_{T_0 S_0}$).[2]

Mit den Hilfssätzen bei der Führerbestimmung meinte ich übrigens genau den von Ihnen angegebenen, der „irrational" am Anfang von §3 bei Brauer, Untersuchungen ... I, Z[ei]tschr[ift] 28 (S. 688) steht. Er wird dort so einfach, daß Brauer (688 unten) nur sagt: Ohne Schwierigkeit erkennt man ... Das ist wenigstens *fast* dasselbe.[3]

Bei den Führern brauche ich eine etwas allgemeinere Fassung: ich setze nur voraus daß die $a_{S,\overline{S}}$ gleich eins; dann zeige ich daß auch die $b_{S,T}$ aus $u_S u_T = u_T u_S b_{S,T}$ zu eins gemacht werden können, dann hat man Ihre Voraussetzung. Das gilt übrigens auch wenn $\mathfrak{S}$ kein Normalteiler. Dann muß das verschränkte Produkt bei nicht-galoisschem L herauskommen, wenn K der zugehörige galoissche Körper war.

Daß mein Darstellungsbeweis sachlich mit Ihrem übereinstimmt, weiß ich; trotzdem halte ich es für wahrscheinlich, daß die Betrachtungen beim Hauptidealsatz in dieser Fassung verständlicher werden.[4] Zum Artinbrief habe ich mir überlegt daß noch sehr viel mehr rein multiplikativ erhalten bleibt, z.B. Analogon zu ähnlichen Algebren u.s.w., es ist aber noch alles unfertig.[5]

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether

Anmerkungen zum Dokument vom Juni 1932

[1]Die Postkarte ist nicht datiert, und auf dem Poststempel ist das Datum nicht genau zu erkennen. Inhaltlich geht es um die Korrektur einer Behauptung, die Noether in ihrem Brief vom 2./3.6.1932 aufgestellt hat; daher haben wir diese Postkarte gleich dahinter eingeordnet.

[2]Die Formeln in diesem Teil der Postkarte waren nicht einwandfrei zu entziffern. Jedenfalls handelt es sich um den Beweis, den Noether in ihrem Brief vom 2./3. 6. 1932 gegeben hatte. Und zwar geht es um den zweiten Teil jenes Beweises, wo Noether sagte: „*Der Beweis hat den Vorteil, sich fast ungeändert auf den allgemeineren Fall zu übertragen, wo es sich um galoisschen Unterkörper L von K (anstelle von KL gesetzt) handelt.*" In diesem zweiten Teil war Noether offenbar ein Fehler unterlaufen. Der „wenig interessante Satz", von dem Noether

spricht, handelt von dem Zusammenhang der 2-Kohomologie einer endlichen Gruppe (gegeben durch Faktorensysteme) mit der 2-Kohomologie eines Normalteilers. Noether rechnet aus, dass die Zusammensetzung der Restriktions- mit der Inflationsabbildung gerade die Potenzierung mit dem Index n des Normalteilers ergibt.

[3]Bei Brauer [Bra28b] an der angegebenen Stelle handelt es sich um die Inflationsabbildung der Brauergruppe.

[4]Hier geht es wieder um den Hilfssatz über Faktorensysteme, für den Noether im vorangegangenen Brief (erster Teil) einen Beweis geliefert hat, den sie jetzt „Darstellungsbeweis“ nennt. Offenbar hatte Hasse geschrieben, dass das ja im wesentlichen derselbe Beweis ist, den er ihr geschickt hatte.

[5]Wenn Noether hier von „rein multiplikativ“ spricht, so meint sie offenbar das Rechnen mit Faktorensystemen zu einer Gruppe G in (multiplikativen) G-Moduln. Das bedeutet wieder einen Schritt in Richtung auf den Formalismus der algebraischen Kohomologie.

---

52 07.06.1932, Noether an Hasse, Postkarte

7.6.32

Lieber Herr Hasse!

Anbei den Chevalley zurück! [1] Ich habe jetzt eine mir genügende ältere Fassung; einen Durchschlag, um den ich Chevalley gebeten hatte, besaß er nicht. Ich hätte aber gern *Korrektur* [2], schon für meine Wintervorlesung über nichtkommutative Arithmetik, die erst das wirklich Nichtkommutative bringen soll, aber vielleicht doch schon ein paar kommutative Anwendungen. Ich vermute, daß auch Deuring für seinen Bericht[3] an Korrektur gelegen ist. – Bei Lemma 2. S. 8 wäre es gut zu zitieren: van der Waerden, letzter §, 128? oder R. Brauer; ich glaube in der erst erscheinenden Crelle-Arbeit.[4] Auch in meiner jetzt sehr verspätet der Abschrift gegebenen „Nichtkomm[utative] Algebra“ steht die Sache.[5]

Ob sich mit meiner Verallgemeinerung des Satzes über Faktorensysteme viel für auflösbare Körper machen läßt, ist mir jetzt doch zweifelhaft geworden. Jedenfalls müßte man ganz anders als Chevalley vorgehen. Denn dieser nutzt hier – anders als beim Beweis des Hilfssatzes – die beiden Eigenschaften, abelsch und direktes Produkt, von Anfang an vollständig aus. Umkehr- und Isomorphiesatz geht ja auch ohne diese Voraussetzungen nicht! Aber vielleicht läßt sich doch der „traurige Rest“ irgendwie aufstellen, der über den größten abelschen Unterkörper hinausgeht.[6]

Viele Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 7.6.1932

[1]Es handelt sich um den Brief von Chevalley an Hasse, den Noether früher (am 3. 6. 1932) zur Einsicht erbeten hatte.

[2]Gemeint sind die Korrekturbogen zur Chevalleyschen Arbeit [Che33a]. Die Arbeit war für eine Publikation im Crelleschen Journal vorgesehen und Hasse, als einer der Herausgeber, erhielt einige Korrekturexemplare. Es war damals üblich, so wie heute „Preprints“ verschickt werden,

den Interessenten die Korrekturbogen zuzuschicken, damit sie schon vor der Publikation davon Kenntnis erhielten.

[3]Deuring arbeitete damals an seinem Bericht über Algebren für die Reihe „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Anwendungen“ des Springer-Verlages [Deu35a].

[4]In der Publikation von Chevalley werden zu „Lemme 2“ tatsächlich van der Waerden und Brauer zitiert.

[5]Noether bezieht sich auf ihre Arbeit [Noe33b].

[6]Hier wird wieder das Bestreben deutlich, die (lokale) Klassenkörpertheorie auf nicht-abelsche Erweiterungen auszudehnen.

---

53 14.06.1932, Noether an Hasse, Postkarte

14. 6. 32

Lieber Herr Hasse!

Können Sie mir ein paar Kleinigkeiten für den Züricher Vortrag beantworten? [1]

1) Stimmt das Zitat „Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassen. Insbesondere: hyperkomplexe Begründung des Artinschen Reziprozitätsgesetzes.“ Ich habe Ann[alen] 104 dazu geschrieben, was sicher stimmen wird. Haben Sie schon Korrekturen? [2]

2) Wie ist der genaue Titel von Chevalley? Stimmt „La théorie des restes normiques“? Und wissen Sie schon in welchem Crelle-Band es erscheint? [3]

Es wäre mir übrigens angenehm, wenn Sie das auf mich bezügliche Zitat in §1 dahin präzisieren würden, daß meine diesbezüglichen Bemerkungen in der Vorlesungsausarbeitung 29/30 den Anstoß zu der Arbeit gegeben haben. Das schrieb mir Chevalley heute; ich erkundigte mich ob seine Definition des Normenrestsymbols im zyklischen unabhängig sei von der gleichlautenden, die ich ihm im Dezember brieflich mitgeteilt hatte. Das war in der Tat der Fall, er hatte sie schon im Oktober, aber angeregt durch meine Bemerkung daß der zykl[ische] Isomorphiesatz im Kleinen ausgedrückt ist durch die Tatsache, daß jeder zyklische Zerfällungskörper schon die ganze Algebrengruppe vom Index Teiler von n erzeugt. Eventuell könnte Chevalley den Zusatz auch in der Korrektur machen.[4]

Wollen wir nicht nach Zürich auch noch irgendwo zusammen in die Höhe gehen – ich dachte an M...[?] in Wiederholung von Nidden! [5] Ich möchte schon vorher 14 Tage in die Berge, vielleicht auch nach Österreich wo man leichter Geld mitnehmen kann.

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 14.6.1932

[1]Noether bereitet sich auf ihren Vortrag auf der Internationalen Mathematiker Tagung in Zürich im September 1932 vor. Vgl. [Noe32a].

[2]Noether erkundigt sich nach dem genauen Titel der Arbeit von Hasse, die sie offenbar in ihrem Züricher Vortrag erwähnen will. Es handelt sich um diejenige Arbeit, die Hasse ihr zum 50. Geburtstag gewidmet hatte [Has33b]. Vgl. Brief vom 26. 3. 1932.

[3]Der genaue Titel der Chevalleyschen Arbeit lautete: „La théorie du symbole de restes normiques". Sie erschien in Band 169 des Crelleschen Journals [Che33a].

[4]Es handelt sich um ein Zitat, das Noether in der Arbeit [Che33a] angebracht haben möchte. Sie schreibt das an Hasse, weil sie weiß, dass Hasse regelmäßig alle Crelle Arbeiten, also auch die von Chevalley, genau durchsieht, bevor er sie zum Druck freigibt. – Am Schluss der Einleitung der Arbeit von Chevalley in der gedruckten Fassung steht in der Tat ein Hinweis auf die Vorlesungsausarbeitung von Noether.

[5]Im Anschluss an die Tagung der Naturforscher und Ärzte 1930 in Königsberg hatten Hasse und Emmy Noether gemeinsam einen Ausflug nach Nidden auf die Kurische Nehrung unternommen. Nun schlägt sie im Anschluss an die Züricher IMU-Tagung wieder einen gemeinsamen Ausflug vor. (Der Name des in Aussicht genommenen Zielorts M... ist auf der Postkarte nicht mehr zu entziffern.) Allerdings ist es zu diesem Ausflug nicht gekommen, wohl weil Hasse mit Davenport schon andere Verabredungen getroffen hatte.

---

54 16.06.1932, Noether an Hasse, Postkarte

Göttingen, 16. 6. 32

Lieber Herr Hasse!

Bezüglich eines Vortrages[1] scheinen Sie durch ein Versehen auf die Liste gekommen zu sein, nämlich dadurch daß ich im Winter einmal sagte, über die gemeinsame Note[2] werden Sie lieber selbst einmal vortragen wollen, was Sie ja dann bei mir im Seminar (nicht in d[er] Gesellschaft!) taten, in Verbindung mit andern Sachen. Ich hoffe aber daß aus diesem Mißverständnis sicher im Winter ein wirklicher Vortrag wird. Im Sommer kommen, wie Neugebauer mir sagt, schon viele Gäste, besonders da die math[ematische] Verbindung eine ganze Vortragsreihe (4. – 10. Juli) veranstaltet mit v.d. Waerden, Wegner, Walther u.s.w. Im Winter ist auch Courant da, dem neueste Zahlentheorie für seine Gesamtauffassung immer gut tut. Aber wie gesagt, Sie stehen auf der Liste: falls Sie im Sommer Lust haben, melden Sie sich also, damit auch die math[ematische] Gesellschaft das hyperkomplexe Rez[iprozitäts]gesetz zu sehen bekommt, und wir wieder ordentlich mathematisch werden können. Außer am 5. Juli, wo v.d. Waerden da ist, ist mein Fremdenzimmer frei! [3]

Aber auch meine Zitatbemerkung war mißverständlich.[4] Ich dachte an Einfügung in die Arbeit Chevalley, da ich annehme Sie haben noch das Manuskript (daß Sie die Vorlesung 29/30 ausdrücklich in Ihrer Arbeit[5] erwähnen, ist mir zwar doch

recht). Chevalley schreibt nämlich am Schluß seines Briefs vom 13/6: „D'ailleurs tout découle naturellement de la remarque que vous faites à la dernière page de votre travail dactylographié sur la théorie des algèbres qui m'a donné l'idée de la définition en question (das N[ormen]R[est]S[ymbol])", und das hätte ich gern dem Sinn nach, nicht gerade wörtlich, zitiert. Falls das Manuskript schon fort ist, bitte ich Chevalley um Einfügung bei der Korrektur.

Ich versuche wieder einmal den Artinbrief zu „verstehen".[6]

Herzl. Grüße Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 16.6.1932

[1]In dem früheren Brief vom 3. 6. 1932 hatte Noether geschrieben, Hasse sei für einen Vortrag in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft vorgemerkt. Wie es scheint, hat Hasse selbst davon nichts gewusst und bei Noether rückgefragt. Nun berichtet Noether, was passiert ist.

[2]Noether meint die Arbeit [BHN32] über das Lokal-Global-Prinzip und die Zyklizität von Algebren.

[3]Wie bereits zum früheren Brief vom 3. 6. 1932 gesagt, hat Hasse erst später, und zwar am 13. Januar 1933, vor der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen vorgetragen. Allerdings nicht über das hyperkomplexe Reziprozitätsgesetz, sondern seinen geänderten Interessen entsprechend über die Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. Es ist uns nicht bekannt, ob Hasse dabei die Noethersche Einladung, bei ihr im Fremdenzimmer zu wohnen, wahrgenommen hat. (In der damals gebräuchlichen Terminologie bedeutet „Fremdenzimmer" das, was heute meist „Gästezimmer" genannt wird.)

[4]Noether bezieht sich auf ihre vorangegangene Postkarte vom 14. 6. 1932. Dort hatte sie darum gebeten, ein Zitat auf ihre Vorlesungsausarbeitung einzufügen. Jetzt stellt sie klar, dass sie das Zitat in die Arbeit von Chevalley eingefügt haben möchte, nicht unbedingt in eine Arbeit von Hasse.

[5]In [Has33b] wird die in Rede stehende Vorlesungsausarbeitung Noethers in folgender Weise zitiert: „E. Noether [4]: *Vorlesungen, insbesondere die Vorlesungsausarbeitung vom W.S. 1929/30, Seminare, zahlreiche Unterhaltungen mit ihrem Freundeskreis, insbesondere mit dem Verfasser, Briefe an diesen, 1929–1932.*"

[6]Vgl. Brief vom 5. 4. 1932.

---

55 21.07.1932, Noether an Hasse, Postkarte

21.7.32

Sehr geehrter Herr Hasse!

Ich kenne tatsächlich Ihren Beweis für die Idealbeziehungen[1] nicht, und Sie kennen meinen nicht (den ich mir erst überlegt habe, als ich von Ihrem hörte, in Bad Elster[2]; aber als einfache Anwendung von Struktursätzen, die ich lange hatte). Ich schlage vor, daß wir beide Beweise, also im ganzen drei, in je einer kurzen Note publizieren, wohl am besten in der (nebenbei alphabetischen) Reihenfolge Chevalley, Hasse, Noether. Denn Chevalley hat etwas mehr; und Ihr Beweis war früher als

meiner.[3] Mich interessierte anfangs nur die Struktur der Maximalordnungen bei zerfallenden verschränkten Produkten, was zu kennen oft bequem ist. Ich wollte das eigentlich für die Herbrand-Schrift nehmen; kann aber da gerade so gut z.B. Idealdifferentiation nehmen. Ich schicke Ihnen also in den nächsten Tagen diese kleine Note, und bekomme dann wohl Ihre zum Ausgleich. Ich wollte ursprünglich den Hauptgeschlechtssatz mit diesen Methoden beweisen; ich halte das auch jetzt noch nicht für ausgeschlossen; denn es scheint mir, daß der Hauptgeschlechtssatz viel elementarer ist als der jetzt zugrunde liegende Satz über zerfallende Algebren insofern als er wesentlich von Idealklassen, nicht von Divisoren oder Elementen handelt.

(Grunwald 107 statt 106 haben Sie doch bemerkt und korrigiert[4]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 21.7.1932

[1]Es geht um die Beziehungen zwischen den Idealen einer Maximalordnung eines zentralen Schiefkörpers $D|K$ (wobei K ein Zahlkörper oder ein lokaler Körper ist) mit den Idealen der Maximalordnung eines maximalen kommutativen Teilkörpers $L \subset D$.

[2]In Bad Elster hatte die Jahrestagung der DMV im September 1931 stattgefunden.

[3]Von den drei in Rede stehenden Noten sind schließlich zwei, nämlich [Has34d] und Noether [Noe34] in der Ausgabe zum Gedenken an Jacques Herbrand in den Actualités scient. et industr. erschienen, während Chevalley seine Note [Che34] in den Hamburger Abhandlungen publiziert hat.

[4]Dies betrifft die Korrektur der Annalen-Arbeit [Has33b] zum 50. Geburtstag von Emmy Noether. Da Noether als inoffizielle Annalen-Herausgeberin wirkte, so hat sie offenbar auch die Korrekturbogen erhalten. Nun erkundigt sie sich, ob ein von ihr bemerkter Druckfehler auch korrigiert wurde. Die Dissertation von Grunwald ist in Band 107 der Mathematischen Annalen [Gru32] erschienen, und so ist sie bei Hasse jetzt auch richtig zitiert. Wie es scheint, stand vorher dort 106. – Wilhelm Grunwald war ein Doktorand von Hasse. Sein Name wurde weithin bekannt durch den „Satz von Grunwald-Wang“, der in der Klassenkörpertheorie und der Theorie der Algebren eine Rolle spielt. [Wan48] entdeckte in dem bei [Gru33] aufgestellten und bei Hasse zitierten Satz einen Fehler, der in [Wan50] und [Has50b] korrigiert wurde. Vgl. Anmerkung 2 zum Brief vom 22. 11. 31.

---

56 03.08.1932, Noether an Hasse, Postkarte

3.8.32

Lieber Herr Hasse!

Ich habe heute mit Neugebauer wegen einer Assistentenstelle gesprochen[1]: es ist aber leider keine Aussicht auf baldiges Freiwerden, da Hilfsassistentengelder eingefroren werden sollen.[2] Dagegen sagt Deuring mir, daß v.d. Waerden für seine Vertretung einen Leipziger Koebe-Schüler in fester Aussicht habe, aber noch keine bindenden Abmachungen getroffen.[3] In Vertretung – ein Jahr – wird aber nur die Hälfte von Deurings Gehalt bezahlt, also nicht viel über 100 M.[4] v. d. Waerdens Adresse ist augenblicklich Graz (Österreich), Peinlichgasse 12, bei Rellich.[5] – Mit

der Zeit käme ja auch ein Notgemeinschaftsstipendium[6] in betracht, für Fitting habe ich diesen Sommer eines erhalten, auf 10 Monate.[7]

Meine Note bekommen Sie erst nächste Woche; ich bin nun einmal langsam im Ausarbeiten, und außerdem habe ich mir erst im Anschluß an Ihre Note überlegt, daß ich mich ebenfalls von der Voraussetzung „k galoissch" freimachen kann; das muß ich noch einarbeiten.[8] Was ich mehr habe als Sie[9], ist daß ich *alle* zur Differente primen Ideale bestimmen kann, d.h. ihre $\mathfrak{p}$-Komponenten, vermöge der Moduln aller Ordnungen aus k. Ob es zahlentheoretische Bedeutung hat, weiß ich einstweilen nicht; dagegen interessiert mich sehr, was Sie über den Zusammenhang mit der Kroneckerschen Klassenzahlrelation schreiben. Wir haben die Rollen getauscht: Sie führen Existenzbeweis, ich schreibe explizit hin; aber in Ihrer transformierten Basis wird wohl allerhand stecken!

Den Chevalley-Beweis hätte ich gern geschickt; ich habe ihn nicht.[10] Ihr Manuskr[ipt] kommt mit meinem Beweis zurück.

Herzl[iche] Grüße, Ihre Emmy Noether

Anmerkungen zum Dokument vom 3.8.1932

[1] Neugebauer war stellvertretender Geschäftsführer des Göttinger mathematischen Instituts und wohl in Abwesenheit von Courant für Assistentenstellen zuständig. – Wahrscheinlich hatte Hasse bei Noether angefragt, ob in Göttingen eine Assistentenstelle frei wäre. Aus dem Zusammenhang geht nicht hervor, für welchen seiner Schüler Hasse sich hier einsetzte. Es besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass es sich um Hans Reichardt handelte, denn Reichardt war soeben (1932) bei Hasse promoviert, mit einer Dissertation über kubische Zahlkörper [Rei33]. Einige Monate später, im März 1933, fragte Hasse bei Brandt in Halle an, ob er nicht Reichardt dort unterbringen könne (was nicht möglich war).

[2] Beachte das Datum dieses Briefes. In Deutschland gab es eine sog. Wirtschaftskrise; offenbar waren die Universitäten mit Kürzungen ihrer Etats konfrontiert.

[3] Deuring hatte damals eine Assistentenstelle in Leipzig bei van der Waerden inne. Er plante, mit einem Stipendium für ein Jahr nach USA zu Ore an die Yale University zu gehen. Dadurch wurde seine Leipziger Assistentenstelle vorübergehend frei.

[4] Demnach betrug das Gehalt eines wissenschaftlichen Assistenten damals etwa 200 Mark.

[5] „Rellich" war der Geburtsname von Frau van der Waerden.

[6] Die „Notgemeinschaft für die deutsche Wissenschaft" wurde 1920 gegründet, um in wirtschaftlich schwierigen Zeiten die Forschung und insbesondere auch den Forschungs-Nachwuchs zu fördern. Zwar war sie 1929 in „Forschungsgemeinschaft" umbenannt worden, aber bei den Wissenschaftlern blieb der Name „Notgemeinschaft" in Gebrauch, wie wir hier sehen.

[7] Hans Fitting war 1931 bei Noether promoviert mit einer Arbeit über Automorphismenringe. Vgl. Brief vom 8. 2. 1931.

[8] Es handelt sich um die Note „Zerfallende Verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen" [Noe34], die schon in der vorangehenden Postkarte vom 21. 7. 1932 erwähnt wurde.

[9] Noether bezieht sich auf Hasses Note „Über gewisse Ideale in einer einfachen Algebra" [Has34d].

[10] Wahrscheinlich handelt es sich um das Manuskript zur Note [Che34], die in den Hamburger Abhandlungen erschien. Hasse bezieht sich in seiner Note [Has34d] mehrfach auf [Che34], er muss also das Manuskript von Chevalley irgendwann zur Einsicht bekommen haben.

57 09.08.1932, Noether an Hasse

Göttingen, 9.8.32

Lieber Herr Hasse!

Hier bekommen Sie nun meine Note, nebst allem anderen zurück. Da Chevalley doch getrennt erscheint – ich hatte verstanden, er hätte Ihnen das Manuskript für Crelle geschickt – könnten wir die Noten auch in die Annalen bringen die augenblicklich rasch drucken und wo ich selbst lange nichts publizierte. Mir ist aber auch Crelle recht wenn es Ihnen lieber ist; ich überlasse es Ihnen.[1] Sind Sie mit Ihren schönen Klassenanzahlplänen voran gekommen? Die Arbeit Wenkoff (aus dem Russischen in d. Math. Zeitschr.; ich glaube er heißt so) über die Bestimmung der Klassenanzahl im quadratischen Körper durch Einbettung in Quaternionenkörper – dargestellt durch ternäre Formen – wäre ja auch zu vergleichen.[2]

Ich lege Ihnen noch einen Brief von dem Krullschüler Rusam bei – den ich nicht zurückbrauche – der Sie interessieren wird. Denn er hat im Fall endlicher Ringe gerade das an Fitting anschließende Problem im wesentlichen gelöst. Ich will ihm das Fitting-Manuskript schicken das ihm vielleicht für ein paar allgemeine Überlegungen nützlich ist; sonst gibt es ja wohl nichts. Eventuell können Sie sich ja noch weitere Einzelheiten von ihm mitteilen lassen.[3]

Ich denke daß die Abzählungen von Chevalley an den Verzweigungsstellen auch durch meine explizite Angabe der Max[imal]-Ordnungen ersetzt werden können, wodurch man genaueren Einblick bekommt entweder indem man wie Chevalley durch Erweiterung mit Zerfällungskörper auf den Matrizenring zurückkommt, oder indem man den Restklassenring nach $\mathfrak{p}$, das zweiseitige Primideal, betrachtet der ja auch Matrizenring wird.[4]

Ich will vermutlich Freitag d. 12., mittags abreisen – die Morgenpost trifft mich noch – vorerst nach Wengen (Wengen, Berner Oberland, postlagernd); vielleicht gehe ich nachher noch nach Wengern-Alp.[5]

Deuring ist schon Sonnabend nach Südtirol gefahren, mit einem Freund Bergtouren zu machen (Meran, postlagernd), will von dort nach Zürich. Was sind Ihre Autopläne? Courant wird Ende August zurückerwartet.

In Zürich wohne ich bei Hopf, Schlößlistr. 2.[6] Auf Wiedersehen dort und herzliche Grüße,

Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 9.8.1932

[1]Beide Noten [Noe34], [Has34d] wurden schließlich im Herbrand-Gedenkband publiziert. Vgl. die Postkarte vom 21. 7. 1932, sowie den nächsten Brief vom 29. 10. 1932.

[2]Wir haben nicht feststellen können, um welche „Klassenanzahlpläne“ Hasses es sich gehandelt hat. – B. A. Venkov hat Anfang der 20er Jahre die Arithmetik von Quaternionenalgebren untersucht, a la Hurwitz. Er ist dabei auf einen arithmetischen Beweis der Dirichletschen Klassenzahlformeln für komplex quadratische Zahlkörper mit Diskriminante $d \not\equiv 1 \bmod 8$ gestossen, die er 1928 auf russisch, und 1931 auf deutsch in der Mathematischen Zeitschrift veröffentlicht hat [Wen31]. Sein Beweis ist auch in seinem Buch über Zahlentheorie zu finden, das 1970 als Elementary Number Theory auch auf Englisch erschienen ist [Ven70]. Ansonsten scheint dies keine große Resonanz gefunden zu haben. Die genannte Bedingung an d kommt daher, dass $-d$ Summe dreier Quadrate sein muss; hierin liegt der Zusammenhang mit der Einbettung des quadratischen Zahlkörpers in eine Quaternionenalgebra.

[3]Die Erlanger Dissertation von Friedrich Rusam (1934?) hatte den Titel: „Matrizenringe mit Koeffizienten aus endlichen Ringen ganzer Zahlen.“ Diese Arbeit ist offenbar in keiner mathematischen Zeitschrift publiziert worden; sie wurde jedoch von Köthe für das Zentralblatt referiert. Der Brief von Rusam an Emmy Noether findet sich in dem Hasseschen Nachlass. Darüberhinaus hat offenbar kein Briefwechsel von Hasse mit Rusam stattgefunden.

[4]Noether bezieht sich auf die Note [Che34] und vergleicht diese mit ihrer eigenen Note [Noe34].

[5]Anscheinend will Noether vor der Internationalen Mathematiker-Konferenz in Zürich noch einige Zeit in die Schweizer Alpen.

[6]Heinz Hopf (1894-1971) gehörte in seiner Göttinger Zeit dem engeren Kreis um Emmy Noether an, zusammen mit seinem Freund Paul Alexandroff. Seit 1931 hatte Hopf eine Professur an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich inne.

---

58 29.10.1932, Noether an Hasse

Göttingen, 29. 10. 32

Lieber Herr Hasse!

Ich freue mich sehr, daß Sie Ihre England-Fahrt so genossen haben; noch schönen Dank für die Karte! [1]

Für den Herbrand-Band[2] wollte ich eigentlich „Idealdifferentiation und Differente“ nehmen, in Erinnerung daran daß das das letzte Gespräch mit Herbrand war, der daran dachte den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Differentendefinitionen in sein Memorial aufzunehmen falls es sich einfach genug machen ließ, was noch unsicher war.[3] Aber wir haben auch so viel über hyperkomplexe Sachen gesprochen, daß das genauso persönlich ist, und ursprünglich hatte ich auch die „Maximalordnungen in verschränkten Produkten“ für den Herbrand-Band bestimmt. So scheint es mir jetzt doch richtiger das zu nehmen; es wäre schade den Zusammenhang unserer Noten auseinanderzureißen. Ich werde also in diesem Sinn an Chevalley, dem ich noch nicht geantwortet habe, außer mündlich in Zürich, in diesen Tagen schreiben.

Eventuell können Sie unsere Noten schon bald hinschicken, da die Sachen ja doch getrennt gedruckt werden sollen; ich werde bei Chevalley fragen ob es Sinn hat.

Ich lege heute zwei Ergänzungsseiten der Note bei, und bitte Sie dafür zu streichen: die letzte Zeile (Formelzeile: $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}S_1 + \cdots + \mathfrak{H}S_n$) auf Seite 3, und Seite 4 bis Schluß des §; ebenso Anmerkung 6. Die alte Seite 4 muß dann 4b werden. Ich habe den Übergang zum verschränkten Produkt im nichtgaloisschen Fall etwas lesbarer gefaßt, und vor allem ein paar Ungenauigkeiten korrigiert: das alte u_S war falsch definiert, und der explizite Ausdruck für das verschränkte Produkt bei beliebigem Faktorensystem war falsch. Ich habe ihn jetzt garnicht angegeben: er heißt $K = \sum k v_S k$; wenn $\mathfrak{G} = \sum \mathfrak{H} S \mathfrak{H}$ und $v_S = \xi^{-1} \overline{u}_S \xi$ gesetzt. Das gilt vermutlich analog bei in k aufgehender Charakteristik p; nach Modifikation Ihrer Beweismethode im Fall eines galoisschen k (Übergang zu Teil- und Erweiterungskörper und Verhalten der Faktorensysteme); das soll sich der Doktorand[4] überlegen, ebenso wie explizite Faktorensystemausdrücke und ähnliches.

Ich lege auch den für die Annalen bestimmten „Hauptgeschlechtssatz“ bei, mit der Bitte um gelegentliche Zurücksendung des Durchschlags. Falls Sie Anmerkungen haben, schreiben Sie diese vielleicht bald; ich werde noch ein paar Tage warten bis ich das Manuskript an Blumenthal schicke.[5] Den Führer-Paragraph habe ich fortgelassen; er wurde so kompliziert daß es keinen Sinn hatte, da nichts damit gemacht wurde, und ich war mir auch nicht klar ob nicht bei abelscher Spezialisierung zu hohe Potenzen der Verzweigungsstellen herauskämen. Ich glaube, es wird weiterführen, wenn man direkt die Beziehungen zwischen Galoismoduln und verschränkter Darstellung an jeder Stelle verfolgt; die Führerdefinition und Beziehung zu den Artinschen Reihen wird sich dann vermöge der Deuringschen Sätze von selbst ergeben.[6] Wird es schon bald Korrektur der Chevalleyschen Klassenkörpertheorie im Kleinen geben, die auch in diesen Fragenkreis gehört (Adresse von Deuring, der Korrekt[uren] bekommt: Department of Mathematics, Yale University, New Haven (Conn.), U.S.A.)[7]

Nun ist noch eine tragikomische Geschichte zu erzählen: Springer, und zwar Ferdinand Springer in höchsteigener Person hat verfügt daß in den Annalen galoissch und abelsch mit großen Anfangsbuchstaben geschrieben wird; eine schon gesetzte Arbeit von Ulm soll sogar umgeändert werden: Ihre wird ja bleiben. Ich habe Blumenthal vergeblich Material geliefert; z.B. Einheitlichkeit bei den Zahlentheoretikern, seit etwa einem Jahr, und platonische Liebe! Auch metabelsch!

Falls die Sache Sie genügend ärgert, können Sie ja bei mir schimpfen daß ich es weiter geben kann; Erfolg fraglich.

Nun herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 29.10.1932

[1]Im Oktober 1932 hatte Hasse seinen Freund Davenport in Cambridge besucht, und auch Mordell in Manchester.

[2]Offenbar hatte Hasse vorgeschlagen, dass sie beide ihre Noten über Maximalordnungen an Chevalley für den Herbrand-Gedächtnisband senden, und Noether reagiert nun darauf. Vgl. die vorangegangenen Briefe vom 9.8, 3.8. und 21.7. Chevalley gab den Gedenkband für Herbrand heraus.

[3]Noethers Arbeit „Idealdifferentiation und Differente“ (die sie schon 1929 auf der DMV-Tagung in Prag angekündigt hatte) hat sie nicht mehr vollendet. Die Arbeit erschien posthum

1950 im Crelleschen Journal [Noe50]. – Bei dem angesprochenen Memorial Herbrands handelt es sich offenbar um die Zusammenfassung der Klassenkörpertheorie, die posthum von Chevalley herausgegeben wurde: [Her35].

[4]Wahrscheinlich Werner Vorbeck. Vgl. Brief vom 3. 6. 1032.

[5]Vgl. [Noe33a].

[6]Noether hatte versucht, die Artinschen Führer zu Charakteren der Galoisgruppe mit Hilfe von hyperkomplexen Systemen zu definieren und zu untersuchen. Im zahm verzweigten Fall hat sie das Programm in der Arbeit „Normalbasen bei Körpern ohne höhere Verzweigung" durchgeführt; diese war im Hensel-Festband des Crelleschen Journals erschienen [Noe32b]. Der Nachweis jedoch, dass der von Noether (im zahm verzweigten Fall) definierte Führer gleich dem Artinschen Führer ist, konnte allgemein erst sehr viel später von Fröhlich [Frö83] geführt werden. Vgl. die Anmerkung 3 zum Brief vom 22.8.1931. Im wild verzweigten Fall ist, wie es scheint, Noether nicht durchgekommen.

[7]Gemeint ist die Arbeit [Che33a]. Dort zeigte Chevalley, wie sich die lokale Klassenkörpertheorie vom zyklischen auf den allgemeinen abelschen Fall ausdehnen lässt. Der zyklische Fall war von Hasse mit dem von ihm lokal definierten Normenrestsymbol in [Has33b] erledigt worden. Hasse selbst hatte sich die Übertragung vom zyklischen auf den abelschen Fall schon überlegt; nachdem sich jedoch herausgestellt hatte, dass auch Chevalley das ungefähr gleichzeitig gemacht hatte, verzichtete Hasse auf eine eigene Publikation und akzeptierte Chevalleys Arbeit für das Crellesche Journal. Vgl. dazu die Anmerkungen zum Brief vom 3. 6. 1932. – Deuring, der sich damals mit einem Stipendium in Yale aufhielt, sollte die Chevalleysche Arbeit noch in seinem Ergebnisband über Algebren [Deu35a] berücksichtigen. Die Chevalleysche Arbeit wird in der Tat im Deuringschen Buch zitiert, jedoch wird dort lediglich gesagt, ohne auf Einzelheiten einzugehen: „*Den Beweis des Reziprozitätsgesetzes und die Theorie des Normenrestsymbols von zyklischen auf abelsche Körper auszudehnen, bietet keine Schwierigkeiten*".Vgl. dazu auch den Brief vom 3. 6. 1932.

---

59 25.11.1932, Noether an Hasse, Postkarte

Göttingen, 25.11.32

Lieber Herr Hasse! [1]

Ich habe, nachdem Frl. Bannow[2] Durchschlag mitbrachte, noch drei weitere Bestellungen auf Ihre Klassenkörpertheorie

Wichmann, Cabrowstr. 10
Dr. Gröbner, Lotzestr. 24
Knauf, Gronerstr. 14.

Wenn es Ihnen bequem ist, schicken Sie alles zusammen an mich! Hoffentlich haben sich soviele gemeldet daß es für die Studenten nicht zu teuer wird, jedenfalls nicht teurer als die angegebenen 7 - 8 M, sonst müßte ich vorher um Preis-Mitteilung bitten.[3]

Vielen Dank für Ihre Kritik am Hauptgeschlechtssatz; ich habe daraufhin an verschiedenen Stellen noch kleine Ergänzungen eingefügt, usw. und hoffe jetzt auch für die vollständig zu sein, denen das Hyperkomplexe noch nicht trivial ist.[4] Sie sollten sich bei der Korrektur (ob galoissch oder „Galoissch", weiß ich nicht!!) davon überzeugen! Den Führer habe ich weggelassen; das wird einmal zusammen mit

anderem kommen, wenn es mehr durchgearbeitet ist. Und ich wollte auch betonen, daß es *ohne* Führer geht.[5]

Hat Frl. Taussky Ihnen geschrieben daß sie sich auf meinen Rat um ein Stipendium bei den „International University Women" beworben hat. Ich habe ihr ein Gutachten geschrieben, Sie sind von Frl. Taussky als Referenz angegeben; als Land wohin sie will, hat sie Deutschland angegeben. Sie können aber auch von sich aus ein Gutachten schicken an Deutscher Akademikerinnenbund, zu Händen Frau Dr. Schlüter-Hermkes, Berlin-Charlottenburg, Lietzenseeufer 8.[6]

Herzlichst, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 25.11.1932

[1]Diese Postkarte war wie üblich an die Adresse von Hasse in Marburg adressiert, wurde dann aber nach Kiel nachgesandt, an die Adresse Fraenkels weil Hasse dort während seines Besuches wohnte. Hasse hielt sich in Kiel zu einem Kolloquiumsvortrag auf. Der Vortrag in Kiel war der erste, in dem Hasse über Lösungsanzahlen von diophantischen Kongruenzen vortrug, das Thema, das ihn 4 Monate später zum Beweis der Riemannschen Vermutung für elliptische Kongruenzfunktionenkörper führte. Hierzu siehe [Roq04b].

[2]Erna Bannow, die spätere Frau Witt, war Mathematik-Studentin.

[3]Hasse hatte im Sommersemester 1932 in Marburg eine Vorlesung über Klassenkörpertheorie gehalten. Die Vorlesung war unter der Federführung von Dr. Franz, einem Doktoranden von Hasse, ausgearbeitet worden. (Vgl. die Anmerkungen zum Brief vom 5. 4. 1932.) Sie soll jetzt hektografiert und einem größeren Interessentenkreis zugänglich gemacht werden. Um den Bedarf einzuschätzen, hatte Hasse vorher einen Rundbrief geschickt und um Vorbestellungen gebeten. Diese unter dem Namen „Marburger Vorlesungen" bekannte Ausarbeitung [Has33d] hat damals weithin Interesse gefunden. Sie erschien später (1967) in Buchform [Has67].

[4]Noether hatte ihr Manuskript zur Arbeit über den Hauptgeschlechtssatz [Noe33a] an Hasse geschickt mit der Bitte um Kommentare. Vgl. den Brief vom 29. 10. 1932.

[5]Es ist nicht anzunehmen, dass mit dieser Formulierung ein politischer Hintersinn verbunden war. Oder doch? Noether schreibt dies Ende November 1932, zu einer Zeit, als die politisch motivierten Turbulenzen an der Universität Göttingen besonders stark waren. Vgl. die nächste Anmerkung.

[6]Olga Taussky hatte im Jahr 1931/32 in Göttingen bei der Redaktion der Ausgabe der Hilbertschen Gesammelten Werke [Hil32] [Hil33] [Hil35] mitgearbeitet. (Vgl. Brief vom 15. 3. 1932.) Offenbar war ihre Stelle abgelaufen und Taussky war wieder nach Wien zurückgekehrt. Noether kümmert sich nun um ein neues Stipendium für sie. In der Biographien-Sammlung von St. Andrews heißt es über Olga Taussky: „*Leaving Göttingen in the summer of 1932, she received a letter from Courant before the new academic year started, advising her not to return to Göttingen due to unrest at the university caused by the deteriorating political situation.*" Sie hat demnach das Stipendium, wenn es ihr denn bewilligt worden war, in Göttingen niemals angetreten. Später, im Jahre 1981 hat Olga Taussky-Todd einen bewegenden Artikel [TT81] geschrieben „*My personal recollections of Emmy Noether.*"

60 30.11.1932, Noether an Hasse, Postkarte

30. 11. 32

Lieber Herr Hasse!

Ich möchte Sie von der Math[ematischen] Gesellschaft noch fragen, ob es Ihnen passen würde, in 14 Tagen, Dienstag, d[en] 13. Dez[ember] vorzutragen, oder ob Ihnen Anfang Januar lieber ist. Ein Vortrag war ja für diesen Winter ausgemacht![1] Diesmal sollen Sie aber wirklich bei mir wohnen. Alexandroff hat das Fremdenzimmer mit vier Wochen Aufenthalt gründlich eingeweiht. Sie kommen doch wohl wie üblich 5^h 03 nachmittags? Die Math[ematische] Gesellsch[aft] ist nämlich auf Wunsch von Weyl, entgegen aller Tradition, auf $5 - 7^h$ gelegt; muß dann bei Ihrem Vortrag wieder auf 6^h gelegt werden. Oder wäre es Ihnen auch recht gleich vom Bahnhof aus vorzutragen?

Artin und ich sollen als Ackermann-Teubner (Algebra-Zahlentheorie)-Preisträger (mit ganzen 500 M jeder) um Weihnachten herum in Leipzig vortragen; ich denke gleichzeitig, habe das aber aus v.d. Waerdens Brief noch nicht verstanden.[2] Das wird aber Ende der Woche, kollidiert also nicht mit Math[ematischer] Ges[ellschaft].

Haben Sie nicht Lust Mittwoch nachmittag bei mir noch einen Separatvortrag zu halten? Ich habe bis jetzt eine systematische Theorie der $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen gebracht – imponiert Ihnen das nicht? – als Grundlage der nichtkommutativen Arithmetik, die im folgenden Semester in kommutative Anwendungen übergehen soll.[3]

Kommt eigentlich bald Korrektur von Chevalley Klassenkörperth[eorie] im Kleinen?[4] Auch für Deuring, der jetzt wirklich ernstlich am Bericht ist; sich in Amerika sehr wohl fühlt.[5]

Also auf Wiedersehen, Ihre Emmy Noether

Anmerkungen zum Dokument vom 30.11.1932

[1] Hasse fuhr schließlich erst im Januar 1933 zum Vortrag nach Göttingen.

[2] Es handelt sich um den „Alfred Ackermann-Teubner Gedächtnispreis zur Förderung der Mathematischen Wissenschaften“. Wenn in diesem Zusammenhang van der Waerden erwähnt wird, so lässt das darauf schließen, dass er dem Nominierungs-Ausschuss für diesen Preis angehörte. Van der Waerden war damals Ordinarius in Leipzig, dem Sitz des Teubner-Verlages.

[3] Im Wintersemester 1932/33 las Emmy Noether „Nichtkommutative Arithmetik“, 2-std., Mittwoch 5-7. Für das folgende Sommersemester 1933 hatte sie „Hyperkomplexe Methoden in der Zahlentheorie“ angekündigt – dazu ist es dann aufgrund der politischen Entwicklungen nicht mehr gekommen.

[4] Noether bezieht sich auf die Crelle-Arbeit [Che33a].

[5] Vgl. zu Deuring die Anmerkungen zum Brief vom 9. 8. 1932.

61 09.12.1932, Noether an Hasse, Postkarte

9. 12. 32

Lieber Herr Hasse!

Ihr Vortrag ist auf Dienstag, d. 10. Januar 33 angesetzt, also so rasch wie möglich nach Weihnachten. Ich erwarte Sie dann also gegen 2^h. Schreiben Sie noch den genauen Titel Ihres Vortrags, besser schon jetzt *vor* den Ferien. Sie können ja die Zetafunktion als Lockmittel dazu nennen![1] Meine Vorlesungszeit ist Mittwoch $5 - 7^h$; kann aber natürlich zu Ihrem Vortrag vorverlegt werden, falls Sie abends abreisen wollen. Ich denke aber Sie bleiben bis mindestens Donnerstag; das lohnt doch eher. Ich habe den Übergang von vom Kleinen zum Großen sehr allgemein besprochen (d.h. Ihre verschiedenen Schlüsse Ann[alen] 104 in allgemeine Modulsätze zusammengefaßt); die Leute sind also tatsächlich gut zu Ihrem Vortrag vorbereitet.[2]

Ich werde Donnerstag den 15. in Leipzig vortragen; Artin leider erst ein späteres mal, der v.d. Waerdensche Reisefonds reicht nicht für beide. Der Preis beträgt übrigens auch nur je 250; sie haben uns wegen der „Not der Zeit" um die Hälfte gekürzt.[3] Ich will vor allem Nachdruck auf die Auffassung des Hauptgeschlechtssatzes als Darstellungssatz legen; ich glaube daß man in dieser Richtung zu vernünftigen Formulierungen kommen kann, wobei das Brandtsche Gruppoid der Idealklassen das formale Hilfsmittel abgeben wird – Analogon zur „multiplikativen Basis" Dc_{ik} des Matrizenrings D_r, die ebenfalls Gruppoid (c_{ik} Matrixeinheiten).

Blumenthal hat die „Hassesche Kriegserklärung" an Springer weitergegeben; hoffentlich wird wenigstens erreicht daß nicht nachträglich Ihre Widmungsarbeit „Abelsch" verschandelt wird (das haben sie bei Fitting getan).[4]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether

Anmerkungen zum Dokument vom 9.12.1932

[1] Hasses neues Interessengebiet, in das er durch seinen Freund Davenport eingeführt worden war, ist die Abschätzung der Lösungsanzahl diophantischer Kongruenzen. Im November 1932 hatte er darüber in Kiel und danach Hamburg vorgetragen. Dabei hatte ihn Artin darauf aufmerksam gemacht, dass das Problem eng mit der Abschätzung der Nullstellen von Kongruenz-Zetafunktionen zusammenhängt. Offenbar hatte Hasse dies bereits an Noether geschrieben, und diese meint nun, dass die Erwähnung von Zetafunktionen im Titel als Lockmittel für die Zuhörer dienen könnte. – Übrigens: Bereits 2 Monate später hatte Hasse seinen ersten Beweis der Riemannschen Vermutung für elliptische Kongruenz-Zetafunktionen gefunden. Hierzu vgl. [Roq04b].

[2] Hasse hat am Mittwoch im Noether-Seminar über das Lokal-Global-Prinzip für quadratische Formen gesprochen.

[3] Es handelt sich um den Ackermann-Teubner Preis, den Noether schon im Brief vom 30. 11. 1932 erwähnt hatte.

[4] Wie Noether im Brief vom 29. 10. 1932 berichtet hatte, geht es um die Frage, ob „abelsch" in den Springer-Zeitschriften groß oder klein geschrieben wird, entsprechend „galoissch" etc..

Auf Anregung von Noether hatte Hasse einen Protestbrief geschrieben; wahrscheinlich hatte er verlangt, dass die Entscheidung über solche Dinge den Autoren überlassen wird. Über den Ausgang dieses „Krieges“ ist uns nichts bekannt.

---

62 11.12.1932, Noether an Hasse, Postkarte

11. 12. 32

Lieber Herr Hasse!

Schönen Dank für die Mitteilung der Vorträge! [1]

Wollen Sie nicht schon Montag, d. 9. kommen, etwa mit dem 5^h-Zug, da Sie vormittags doch wohl Vorlesung haben. Das würde sich mehr lohnen! Oder sind Sie auch Montag nachmittag besetzt?

Wenn Sie mir gleich antworten, kann ich schon diesen Dienstag (d. 13.) in der Math[ematischen] Ges[ellschaft] Ihre genauen Pläne mitteilen. Eventuell könnten wir dann auch den Vortrag bei mir auf Montag abend legen, $6–8^h$: hätten Mittwoch nach Tisch für einen Spaziergang frei. Also teilen Sie ihre Absichten mit!

Ich habe mir unterdessen die Gruppoidsachen weiter überlegt. Ich neige der Ansicht zu, daß die Umkehrsätze beliebiger galoisscher Körper[2] auf solche Gruppoidisomorphismen – oder was dasselbe ist, Mischgruppenisomorphismen, also Operatorisomorphismen – hinauskommen. Und zwar müßte es sich dann um Beziehungen zwischen der Komposition der absolut irreduziblen Darstellungen der Gruppe, und der verschränkten Darstellungen in die Idealklassengruppe handeln. Dabei dürfen nicht nur, wie im abelschen Fall, die (zweiseitigen) Darstellungsklassen (Charaktere) komponiert werden, sondern die Darstellungen selbst (also die einseitigen Klassen) mit den Darstellungsklassen – in Analogie mit der Komposition einseitiger und zweiseitiger Idealklassen in einfachen Algebren. Aber das ist Zukunftsmusik, und vielleicht nicht einmal wahr.

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether

Anmerkungen zum Dokument vom 11.12.1932

[1] Das Thema für den Vortrag vor der Mathematischen Gesellschaft lautete: „*Über die Nullstellen der Artinschen Kongruenzzetafunktionen.*“ Einen Tag danach sprach Hasse im Rahmen der Noether-Vorlesung zum Thema:„*Zur Theorie der quadratischen Formen*“. Dabei handelte es sich um das Lokal-Global-Prinzip für quadratische Formen.

[2] Noether denkt hier wieder an die Verallgemeinerung der Klassenkörpertheorie auf beliebige galoissche (nicht notwendig abelsche) Erweiterungen. – Den Begriff „Gruppoid“ hatte Brandt eingeführt bei der Beschreibung der Idealtheorie in Maximalordnungen einfacher Algebren. Er findet sich in den Arbeiten von Artin und von Hasse zur Arithmetik der Maximalordnungen weiter ausgebaut. Es ist uns nicht bekannt, was Noether im Sinne hatte, als sie diesen Begriff mit der gesuchten Verallgemeinerung der Klassenkörpertheorie in Zusammenhang brachte.

63 26.12.1932, Noether an Hasse

Lieber Herr Hasse!

zu Ihren Fragen habe ich mir jetzt einiges, wenn auch nicht alles überlegt. Ich fange mit dem letzten an:

Sei $P = (S(e_i e_k))$ die Systemmatrix: dann $e = \mathfrak{e}P^{-1}\mathfrak{e}'$ Haupteinheit, wo P als negativ vorausgesetzt.

P negativ bedeutet bekanntlich, daß das System halbeinfach, und daß die Grundzahlen der absolut irreduziblen Darstellungen nicht durch die Charakteristik des Koeffizientenbereichs teilbar, also insbesondere bei Charakter Null zweite Bedingung erfüllt.

Nun wird $\bar{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e}P^{-1}$ die zu $\mathfrak{e}$ komplementäre Basis: denn

$$\mathrm{Sp}(\mathfrak{e}'\bar{\mathfrak{e}}) = \mathrm{Sp}(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}P^{-1}) = \mathrm{Sp}(\mathfrak{e}'\mathfrak{e})P^{-1} = PP^{-1} = E.$$

Komplementäre Basen transformieren sich kontragredient: sei $\mathfrak{c}' = C\mathfrak{e}'$; also $\mathfrak{c} = \mathfrak{e}C'$: dann $P_\mathfrak{c} = CPC'$; (§25 meiner Darstellungsarbeit), also $\bar{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}P_\mathfrak{c}^{-1} = \mathfrak{e}C'^{-1}P^{-1}C^{-1} = \mathfrak{e}P^{-1}C^{-1} = \bar{\mathfrak{e}}C^{-1}$. Damit folgt: $\bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{c}' = \bar{\mathfrak{e}}\mathfrak{e}'$.

Es genügt also: $E = \bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{c}'$ nachzuweisen für irgend eine Basis. Ich wähle als $\mathfrak{c}$ das System der Matrizeneinheiten (nach Übergang zu passendem Erweiterungskörper des Koeffizientenbereichs) $c_{ik}^{(\nu)}$. Die dazu komplementäre Basis wird: $\bar{\mathfrak{c}} \sim c_{ki}^{(\nu)} \cdot \frac{1}{n^{(\nu)}}$ ($n^{(\nu)}$ Grad der einzelnen Matrixalgebren). Also

$$\bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{c}' = \sum_\nu \sum_{i,k} \frac{1}{n^{(\nu)}} f_{ki}^{(\nu)} c_{ik}^{(\nu)} = \sum_\nu \sum_k c_{kk}^{(\nu)} = \sum_\nu e^{(\nu)} = 1.$$

Die Überlegungen über die Kontragredienz der Basis $\mathfrak{c}$ bleiben offenbar erhalten, wenn man die reduzierte Spurenmatrix zugrunde legt, wo dann $c_{ik}^{(\nu)}$ und $c_{ki}^{(\nu)}$ komplementär werden. Die Einsdarstellung kommt aber nur heraus, wenn jeweils nur eine Zeile und Spalte der $e_{ik}^{(\nu)}$ genommen wird.

Die Überlegung mit der Komplementärbasis gibt noch eine Deutung der zweiten Frobenius-Relation: $PM_\alpha = N_\alpha P$, wenn wieder P als Spurenmatrix genommen wird. Denn $PM_\alpha P^{-1} = (P^{-1})^{-1}M_\alpha(P^{-1})$ gibt dann gerade die durch die Komplementärbasis $\bar{\mathfrak{e}}$ gelieferte Darstellung, die also gleich (nicht nur äquivalent) der Rechtsdarstellung $\mathfrak{e}'a = N_\alpha\mathfrak{e}$ wird. Wegen der kontragredienten Transformation kann man sich wieder auf Basen $\mathfrak{c}'$, $\bar{\mathfrak{c}}$ beschränken: hier ist es aber klar, $c_{11}^{(\nu)}, \ldots, c_{1n_\nu}^{(\nu)}$ liefert dieselbe Darstellung wie $c_{11}^{(\nu)}, \ldots, c_{n_\nu,1}^{(\nu)}$. Hier bleibt also auch bei reduzierter Spur die Relation erhalten.

Die erste Frobenius-relation: $N'_\beta M_\alpha = M_\alpha N'_\beta$ bedeutet schließlich, daß das System, aufgefaßt als Rechtsmodul, das dazu reziprok isomorphe als Automorphismenring besitzt (als vollen, wenn Einselement existiert). Denn die Darstellung des (Operator-) Automorphismenrings ist gegeben durch die Gesamtheit der mit der Darstellung vertauschbaren Matrizen (an vielen Stellen zu finden; z.B. in meiner demnächst erscheinenden Zeitschriftarbeit über Zerfällungskörper u.s.w.) Die Tatsache des vollen Aut.rings ist identisch mit dem Satz von Frobenius in §1 und allgemeiner in §3 (wo Existenz des Einselements vorausgesetzt).

Mit dieser direkten Produktbildung des Systems $\mathfrak{S}$ mit dem Aut.ring $\overline{\mathfrak{S}}$ (oder rez. isomorphen) hängt auch die mit „Parameter" $\mathfrak{x} = \xi_1, \ldots, \xi_n$ gebildete peristrophe Matrix zusammen. Denn betrachtet man $\xi_1, \ldots, \xi_n$ als Basiseinheiten eines isomorphen Systems, so geht die per. Matrix P_ξ einfach über in $(\xi_i \xi_k) = \mathfrak{x}'\mathfrak{x}$. Man kann dann durch $\bar{\mathfrak{e}}_\mathfrak{x} = \mathfrak{e} P_\xi^{-1}$ eine verallgemeinerte Komplementärbasis definieren, wenn P_ξ^{-1} definiert ist, in $\mathfrak{S} \times \overline{\mathfrak{S}}$, wo $\overline{\mathfrak{S}}$ Koeff.bereich. Es gilt wieder daß Komplementärbasen sich kontragredient transformieren; und jetzt ist die geringere Voraussetzung der Existenz einer Inversen zu der mit Parameter gebildeten Matrix (in $\mathfrak{S}$); das scheint zu sein daß die zweiseitig unzerlegbaren Komponenten von $\mathfrak{S}$ primär werden also der Zerlegung des Restklassenrings nach Radikal entsprechen. Man muß dann noch die weiteren Schlüsse mit der Komplementärbasis machen können; bei der ersten Überlegung bin ich nicht gleich durchgekommen. Es muß sich um Analoga handeln zu meiner Multiplikation Z_Z eines kommutativen galoisschen Körpers mit sich, und um den Zusammenhang von Idempotenten und Komplementärbasis im gewöhnlichen Sinn, wie er bei Z_Z auftritt. Vielleicht lassen Sie einmal jemand Frobenius in diese Sprache übersetzen; es lohnt sicher!

Ich wünsche Ihnen den nötigen Schnee zum Ski laufen; es sieht nicht danach aus. Ich will ein paar Tage (wohl Donnerstag bis Dienstag) nach Berlin und Magdeburg zu Bekannten und Verwandten.

Ein gutes 1933! Auf Wiedersehen im Januar,

Ihre Emmy Noether.

---

64 04.02.1933, Noether an Hasse, Postkarte

4. 2. 33

Lieber Herr Hasse,

Vor allem wünsche ich Ihnen, daß Sie ihr Familien-Lazarett bald wieder abschlagen können! Mir ist der 17. 2. natürlich gerade so recht - ich komme also dann am Nachmittag. Ich habe unterdes einiges etwas ausgeführt; viel ist es noch nicht.[1]

Der Beweis von Zorn, für die zerfallenden Algebren, hat mir viel Vergnügen gemacht; das sieht mir immer mehr nach Riemann-Rochschem Satz im Hyperkomplexen aus, das sollte man von da aus einmal ohne ζ-Funktion machen können![2]

Ich bin bei der Vorlesung auf ein paar belanglose Versehen in Ihrer Schiefkörperarbeit gestoßen; ich werde sie Ihnen in Marburg angeben. Anstatt sich auf die vorangehenden Sätze zu beziehen, schreiben Sie explizite Zerlegungen hin, wobei die Idealfaktoren nicht ganz sind.[3]

Also gute Besserung allen!

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 4.2.1933

[1] Es geht offenbar um einen Kolloquiumsvortrag von Noether in Marburg.

[2] Zorn, ein früherer Doktorand von Artin, hatte in einer Arbeit in den Hamburger Abhandlungen [Zor33] gezeigt, dass das Lokal-Global-Prinzip für Algebren auch aus der Dissertation von Käte Hey hergeleitet werden kann. Käte Hey hatte 1927 bei Artin in Hamburg promoviert. Ihre Dissertation befasste sich mit der Zetafunktion von Schiefkörpern. Die Arbeit war niemals in einer mathematischen Zeitschrift publiziert worden, sie war aber gedruckt und an Interessenten verteilt worden. Unter den Fachleuten war die Arbeit also bekannt. Sie enthielt allerdings Fehler, sie war schwer zu lesen, und die Zetafunktion musste noch ergänzt werden durch Faktoren an den unendlichen Stellen. Das hat Zorn in seiner Arbeit in den Hamburger Abhandlungen getan.

Wenn Noether vom „Riemann-Rochschen Satz im Hyperkomplexen“ spricht, dann steht das in Zusammenhang mit der Dissertation von Witt 1933. Witt war von den Artinschen Göttinger Vorträgen zur Klassenkörpertheorie „tief beeindruckt“, wie er selbst angibt [Wit83]. Diese Vorträge hatten im Februar 1932 stattgefunden (vgl. Noethers Brief vom 11. 2. 1932) und Witt, dadurch angeregt, hatte sich zum Ziel gesetzt, die Klassenkörpertheorie für Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper zu entwickeln. Er erhielt von Noether als Dissertationsthema die Aufgabe, die Resultate und Methoden von Käte Hey auf Funktionenkörper zu übertragen. Er tat das in seiner Dissertation [Wit34a], wobei er den „Riemann-Rochschen Satz im Hyperkomplexen“ im Funktionenkörperfalle formulierte und bewies. Dieser Satz hat heute im Rahmen der sog. nichtkommutativen algebraischen Geometrie eine Bedeutung gewonnen. – Es ist interessant, dass Noether sofort nach der Lektüre von Zorn/Hey (also noch bevor sich Witt im Funktionenkörperfall damit beschäftigt hatte) die Idee hatte, man müsse den „Riemann-Rochschen Satz im Hyperkomplexen“ nunmehr auch im Falle von Zahlkörpern formulieren können. Explizit ist das erst später durchgeführt worden, nämlich 1950 in der Dissertation des Artin-Schülers John Tate [Tat67].

[3] Es handelt sich um die Arbeit [Has31d].

65 03.03.1933, Noether an Hasse

3. 3. 33

Lieber Herr Hasse!

Vor allem meinen Glückwunsch zur „Riemannschen Vermutung“. Sie haben unglaublich viel in letzter Zeit gemacht! Ich vermute daß Sie nun an die allgemeine Artin-Schmidtsche Zetafunktion werden herankönnen, da Sie jetzt schon allgemeine Klassenkörpertheorie heranziehen.[1]

Die Note von Chevalley hat mich sehr interessiert; ich vermute daß ein solches Auftreten von Idealen als Koeffizientenbereich ($\mathfrak{a}_{ik}$ Koeffizientenbereich von e_{ik}, der Matrizeneinheit) überall bei Anwendung verschränkter Produkte hineinspielen wird, bei Charakterisierung der Maximalordnungen, was ich ja nur bei Faktorensystem Eins habe, in meiner Herbrand-Note. Vielleicht kommt man so auch zu weiteren Deutungen der Ideal-Faktorensysteme.[2]

Ihre Klassenkörpernote ist jetzt sehr klar geworden in Fragestellung und Methode.[3] Ich hänge noch an einer Stelle, was *nur* an meiner Ungeschicklichkeit liegt. Daß α_0 Hauptideal, schließen Sie offenbar aus dem

Hilfssatz: Ist das Hauptideal $(\alpha) \underset{n}{=} \mathfrak{p}_1^{\overline{a}_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{\overline{a}_s}$, so gibt es ein Hauptideal $(\alpha_0)=\mathfrak{p}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{a_s}$ mit $a_i \equiv \overline{a}_i \pmod{n}$.

Das muß aus einfachen Schlüssen über absolute Idealklassen und abelsche Gruppen folgen; aber ich komme nicht drauf. Oder findet man irgendwo diesen Schluß von der n-Gleichheit auf die wirkliche Gleichheit? Ich habe den Eindruck daß ich eine Trivialität nicht sehe.[4]

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 3.3.1933

[1]Es geht um den Beweis des Analogons der Riemannschen Vermutung für elliptische Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper. Aus der Korrespondenz von Hasse mit Davenport und Mordell wissen wir, dass Hasse den Beweis Ende Februar 1933 gefunden hatte. Er hat also Emmy Noether bald danach informiert. Hasses Beweis benutzte die Klassenkörpertheorie der komplexen Multiplikation, die er in früheren Arbeiten im Crelleschen Journal dargestellt hatte: [Has27d], [Has31b]. Daher erwähnt Emmy Noether die Klassenkörpertheorie. Wenn Noether von der allgemeinen Artin-Schmidtschen Zetafunktion spricht, dann bezieht sie sich erstens auf die Artinsche Dissertation (1921), in der er die Zetafunktion für hyperelliptische Funktionenkörper definiert hatte, und zweitens die Habilitationsschrift von F. K. Schmidt (1927), in welcher die Zetafunktion beliebiger algebraischer Funktionenkörper (mit endlichem Konstantenkörper) definiert und untersucht wird. Vgl. [Art24a], [Art24b], [Sch31a].

[2]Es handelt sich wohl um die Arbeit von Chevalley mit dem Titel „Sur certains idéaux d'une algèbre simple“ [Che34], welche in den Hamburger Abhandlungen erschien. Vielleicht hatte Noether (und Hasse) einen Vorabdruck oder die Korrekturfahnen dazu erhalten. Es gibt enge

Verbindungen dieser Arbeit zu den Arbeiten von Noether [Noe34] und Hasse [Has34d], die später im Gedenkband für Herbrand erschienen.

[3]In dieser Note gibt Hasse eine explizite Konstruktion zyklischer Klassenkörper unter der Voraussetzung, dass die relevanten Einheitswurzeln im Grundkörper liegen. Hasse hatte das Manuskript am 22. 2. 1933 an Emmy Noether (als inoffizielle Herausgeberin der Mathematischen Annalen) geschickt. Die Arbeit [Has33c] erschien noch 1933. Wenn Noether schreibt, dass die Arbeit „jetzt" sehr klar geworden sei, dann ist zu vermuten, dass es eine frühere Version gegeben hat, die nicht so klar war. Uns ist jedoch keine frühere Version bekannt.

[4]Das war ein Druckfehler in dem Manuskript, siehe den nächsten Brief vom 22. 3. 1933.

---

66 22.03.1933, Noether an Hasse, Postkarte

22. 3. 33

Lieber Herr Hasse!

Da ich am Sonntag für ein paar Wochen verreise (Westerland - Sylt, Villa Richard), wollte ich bitten die Vorlesungsausarbeitung (ebenso für Tsen) erst zu Semesteranfang zu schicken.[1]

Sie hatten übrigens wirklich in beiden Fassungen Ihres Klassenkörpermanuskripts die falsche Formel: $\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \mathfrak{p}^a = \alpha_0$ (Hauptideal); daher mein Nichtverstehen! Ich habe das $\mathfrak{f}$ gestrichen, auch den Text etwas geändert; Sie können ja, was Sie wollen, bei der Korrektur wieder streichen![2]

In Marburg habe ich aber offenbar mehr behauptet als ich beweisen kann; die Zuordnungen sind nicht so glatt und eindeutig, wie etwa die Darstellung der Ikosaedergruppe glauben machte.[3] Im Augenblick geht's nicht weiter.

Deuring hat für das Herbrandheft in Fortsetzung seiner analytischen Untersuchungen den folgenden Satz gegeben: „Es gibt eine positive Zahl a, sodaß die Funktion $Z_d(s) = \sum(n^2 + bnm + fm^2)^{-s}$, wo die Form die Diskriminante $-4d = b^2 - 4f$ hat, im Bereich $0 < t < d^a$ nur Nullstellen vom Realteil $\frac{1}{2}$ hat." Das scheint doch wieder eine sehr schöne Sache zu sein! Er will demnächst in New York bei der Versammlung der Amer. Math. Soc. darüber vortragen.[4]

Ich habe mir die folgende Deutung der „Verlagerung" beim Hauptidealsatz überlegt. Bildet man das verschränkte Produkt von Idealkl[assen]gruppe (Kommutatorgr[uppe]) mit zugehöriger abelscher (galoisscher) Gruppe, und dann eine solche Potenz, daß die Faktorensysteme zu $S_2, \ldots, S_n$ gleich eins werden, so wird das zu S_1 die Verlagerung zu S_1. Nach dem Satz von Chevalley und Ihrem. Das müßte eine Reduktion aufs Zyklische bedeuten![5]

Beste Grüße, Ihre E.N.

Anmerkungen zum Dokument vom 22.3.1933

[1]Beachte das Datum des Briefes. Seit zwei Monaten gab es in Deutschland eine nationalsozialistische Regierung. Es gab antisemitische Ausschreitungen in Göttingen. Die Universität war im Zuge der „Gleichschaltung" zunächst geschlossen worden; der Semesteranfang wurde auf den Mai 1933 verschoben. Daraus erklärt sich, dass Noether noch Ende März „für ein paar Wochen verreist". – Bei der in Rede stehenden Vorlesungsausarbeitung handelt es sich um die Hasseschen „Marburger Vorlesungen" zur Klassenkörpertheorie [Has33d] aus dem Sommersemester 1932. Vgl. Fußnote 3 zum Brief vom 25. 11. 1932. – Chiungtze C. Tsen war ein Doktorand von Emmy Noether. In seiner Doktorarbeit fand er den damals sehr beachteten „Satz von Tsen", demzufolge jede Algebra über einem algebraischen Funktionenkörper einer Variablen zerfällt, wenn der Konstantenkörper algebraisch abgeschlossen ist.

[2]Vgl. den vorangegangenen Brief vom 3. 3. 1933. Der Fehler erscheint in der gedruckten Fassung nicht mehr.

[3]Wir wissen nicht, worüber Noether in Marburg vorgetragen hatte. Da sie aber die Ikosaedergruppe erwähnt, so erscheint es nicht unwahrscheinlich, dass es sich um das Thema „Klassenkörpertheorie für galoissche Erweiterungen" gehandelt hat. Wie aus früheren Briefen ersichtlich, beschäftigte sich Noether seit mehr als einem Jahr mit diesem Thema, angeregt durch Hasses Resultat, das in der gemeinsamen Arbeit von Brauer-Hasse-Noether [BHN32] dazu erwähnt worden war.

[4]Die Arbeit von Deuring erschien 1935 im Crelleschen Journal [Deu35c]; eine Voranzeige 1933 im Bulletin of the AMS.

[5]Der „Satz von Chevalley und Hasse", der hier angesprochen wird, ist offenbar derjenige, den Noether im Brief vom 3. 6. 1932 diskutiert hatte. Wie es scheint, bezieht sich Noether hier auf die folgende Situation:

Sei K ein Körper und L sein absoluter Klassenkörper, Galoisgruppe G. Ferner sei L_1 der absolute Klassenkörper von L, Gruppe C. Dann ist die Galoisgruppe von $L_1|K$ eine Gruppenerweiterung von G mit C; so etwas nennt Noether ein „verschränktes Produkt" von G mit C. Und zwar ist C genau die Kommutatorgruppe. Andererseits ist C als G-Modul isomorph zur Idealklassengruppe von L; identifiziert man C mit dieser Idealklassengruppe so erhält man das, was Noether „das verschränkte Produkt der Idealklassengruppe [also C] mit zugehöriger abelscher Gruppe [also G]" nennt. Dazu gehört ein Faktorensystem aus $H^2(G, C)$, sagen wir γ. Nun ist G ein direktes Produkt von zyklischen Gruppen, seien $S_1, S_2, \dots S_r$ Erzeugende dieser zyklischen Faktoren; setze $S = \langle S_2, \dots S_r \rangle$ und $T = \langle S_1 \rangle$, also $G = S \times T$. Bedeutet jetzt n die Ordnung von S so sagt Noether, dass nach dem in Rede stehenden Satz γ^n (eingeschränkt auf T) das Bild von γ bei der Verlagerung von G nach T ist. Also „Reduktion" auf die zyklische Gruppe T.

Es ist nicht klar, was Noether mit dieser „Reduktion" bezweckt. Vielleicht einen einfacheren Beweis des Hauptidealsatzes der Klassenkörpertheorie? Oder sie möchte dies für das Kapitulationsproblem benutzen? Das wird nicht ausgeführt.

---

67 10.05.1933, Noether an Hasse

Göttingen, 10. 5. 33

Lieber Herr Hasse!

Vielen herzlichen Dank für Ihren guten freundschaftlichen Brief![1] Die Sache ist aber doch für mich sehr viel weniger schlimm als für sehr viele andere: rein

äußerlich habe ich ein kleines Vermögen (ich hatte ja nie Pensionsberechtigung), sodaß ich erst einmal in Ruhe abwarten kann; im Augenblick, bis zur definitiven Entscheidung oder etwas länger, geht auch das Gehalt noch weiter.[2] Dann wird wohl jetzt auch einiges von der Fakultät versucht, die Beurlaubung nicht definitiv zu machen; der Erfolg ist natürlich im Moment recht fraglich. Schließlich sagte Weyl mir, daß er schon vor ein paar Wochen, wo alles noch schwebte, nach Princeton geschrieben habe wo er immer noch Beziehungen hat. Die haben zwar wegen der Dollarkrise jetzt auch keine Entschlußkraft; aber Weyl meinte doch daß mit der Zeit sich etwas ergeben könne, zumal Veblen im vorigen Jahr viel daran lag, mich mit Flexner, dem Organisator des neuen Instituts, bekannt zu machen.[3] Vielleicht kommt einmal eine sich eventuell wiederholende Gastvorlesung heraus, und im übrigen wieder Deutschland, das wäre mir natürlich das liebste. Und vielleicht kann ich Ihnen sogar auch einmal so ein Jahr Flexner-Institut verschaffen - das ist zwar Zukunftsphantasie - wir sprachen doch im Winter davon. An Ore und Deuring zu schreiben, dachte ich wenn einmal für Richard Brauer etwas nötig wird, der zwar noch Assistent ist, aber „auf dringende Empfehlung" des Kultusministers „bis auf Weiteres" nicht liest; Ore hatte ja schon einmal daran gedacht, R. Brauer für ein Jahr kommen zu lassen, aber dann waren die nötigen Mittel wieder nicht zur Verfügung.[4] Dieses „bis auf Weiteres nicht lesen" ist ja hier im Institut ziemlich katastrophal; Davenport hat Ihnen vielleicht schon berichtet.[5] Aber gerade darum wird ja wohl ziemlich bald eine Beruhigung kommen![6]

Ihre Ausarbeitung[7] lese ich mit viel Freude; ich denke daß ich zwischendurch die „Noethergemeinschaft" in der Wohnung versammeln werde um darüber zu sprechen.[8] Schilling[9] schrieb mir von den neuen hyperkomplexen Ansätzen von Chevalley; es scheint das zu sein was ich mir immer gewünscht hatte, und ich bin sehr gespannt darauf!

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.

Ich schicke gleichzeitig ans Seminar den Hauptgeschl[echts]satz.[10] Ihre Kritik ist voll ber[ücksichtigt].

Anmerkungen zum Dokument vom 10.5.1933

[1]Am 25. April 1933 war Emmy Noether durch ein Telegramm des Ministeriums „mit sofortiger Wirkung beurlaubt" worden – gleichzeitig mit 5 anderen Göttinger Wissenschaftlern. Somit traf Emmy Noether als eine der ersten die volle Schärfe des von der nationalsozialistischen Regierung erlassenen „Gesetzes zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums" mit seinem berüchtigten Arierparagraphen (§ 3). Wenn sich Noether jetzt für Hasses „guten freundschaftlichen Brief" bedankt, so können wir auf dem genannten Hintergrund annehmen, dass Hasse, nachdem er von Noethers „Beurlaubung" erfahren hatte, ihr sofort brieflich seine freundschaftliche Verbundenheit zum Ausdruck gebracht hat. Einzelheiten aus diesem Brief sind uns nicht bekannt. Insbesondere wissen wir nicht, ob Hasse jetzt schon seinen Plan erörtert hat, durch Vorlage von Gutachten darauf hinzuwirken, dass die Entlassung von Emmy Noether nicht permanent gemacht wird. Das kommt in späteren Briefen Noethers zur Sprache.

[2]Die bedrückende fianzielle Lage Emmy Noethers in Göttingen hat C. Tollmien in [Tol90] geschildert. Demnach war Emmy Noether „in den zwanziger Jahren unter den Privatdozenten

und Professoren, die in Göttingen einen Lehrauftrag erhielten, diejenige mit dem geringsten Einkommen." Das „Gehalt", von dem Noether hier spricht, war wohl die Vergütung für den Lehrauftrag, der in jedem Semester neu beantragt werden musste.

[3]Abraham Flexner war der geistige Vater und der erste Direktor des „Institute for Advanced Study" in Princeton, das Noether kurz „Flexner-Institut" nennt. – Es ist wahrscheinlich, dass Emmy Noether anlässlich des Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich im September 1932 mit Veblen zusammengekommen war. Wie es scheint, war auch Flexner auf diesem Kongress, und Noether ist also dort mit Flexner zusammengetroffen.

[4]Øystein Ore an der Yale Universität hatte seit Jahren mit Emmy Noether engeren wissenschaftlichen Kontakt. Er hatte mit ihr zusammen die Gesammelten Werke von Dedekind [Ded32] herausgegeben (unter Mitwirkung von Robert Fricke, der jedoch noch vor Erscheinen der Ausgabe verstorben war). Max Deuring, der „beste Schüler" von Noether (nach ihren eigenen Worten) hielt sich gerade als Stipendiat an der Yale Universität bei Ore auf.

[5]Davenport hatte im Sommer 1931 ein Semester lang bei der Familie Hasse gewohnt, und seit der Zeit hatte sich eine enge Freundschaft zwischen Hasse und Davenport entwickelt. Für das Sommersemester 1933 hatte Davenport ein Stipendium seines Colleges in Cambridge (Trinity) bekommen für einen Forschungsaufenthalt in Göttingen. Da der Semesterbeginn auf Mai 1933 verschoben worden war, so wohnte Davenport im April 1933 bei Hasse in Marburg, wo sie zusammen an dem Beweis der Riemannschen Vermutung für die heute so genannten „Davenport-Hasse Kurven" arbeiteten. Im Mai 1933 siedelte Davenport nach Göttingen über und wurde somit Zeuge der Auflösung des Mathematischen Instituts infolge der Nazi-Politik. An den Wochenenden pflegte Davenport nach Marburg zu Hasse zu reisen, und daher erwähnt Noether, dass Hasse vielleicht schon von Davenport über die Göttinger Zustände im einzelnen unterrichtet worden sei.

[6]Wie viele andere damals meinte also auch Noether, dass nach einer gewissen Zeit wieder normale Verhältnisse eintreten würden. Die katastrophalen Entwicklungen in dem nächsten Jahrzehnt hat sie nicht vorausgesehen.

[7]Es handelt sich um die Ausarbeitung [Has33d] der Marburger Vorlesungen Hasses aus dem Jahre 1932; vgl. den vorangehenden Brief Noethers vom 22. 3. 1933.

[8]Noether durfte nicht mehr in den Gebäuden der Universität ihr Seminar abhalten. Wie wir erfahren, beabsichtigt sie nun, ihren engeren Kreis in ihrer Wohnung zusammenzurufen, um gemeinsam Hasses Vorlesungsausarbeitung durchzuarbeiten. Sie hat das schließlich auch getan. Es wird erzählt, dass ihr Schüler Ernst Witt dabei einmal in SA-Uniform erschienen war, dass das aber Emmy Noether nicht weiter gestört hat. Hierzu vgl. auch die in [Ker00] zitierte Äußerung von Herglotz über Witt. – Der Name „Noethergemeinschaft" ist offenbar in Anlehnung an den Namen der „Notgemeinschaft" gewählt worden; vgl. Fußnote 2 zum Brief vom 3. 8. 1932.

[9]O.F.G. Schilling war ein Doktorand bei Noether. Nach der Emigration von Noether hat Hasse ihn als seinen Schüler übernommen; er wurde im Jahre 1935 in Marburg promoviert mit einer Arbeit aus der Algebrentheorie. Später emigrierte Schilling nach Cambridge (England) und dann nach Princeton (USA) an das Institute for Advanced Study, wohin ihn Hasse empfohlen hatte.

[10]Es handelt sich um die Korrekturfahnen zur Noetherschen Arbeit über den Hauptgeschlechtssatz [Noe33a]. Noether hatte Hasse um Durchsicht und Kritik gebeten, vgl. Brief vom 25.11.1932.

---

68 21.06.1933, Noether an Hasse

Göttingen, 21. 6. 1933

Lieber Hasse! [1]

Schönen Dank für Ihren Pfingstbrief [2]; Sie machen sich wirklich eine gründliche Arbeit mit den Gutachten! [3] Und haben doch sonst schon Arbeit genug! Wichmann[4] hat dem Kurator noch gerade, als dieser Pfingsten nach Berlin fuhr, die Studentenunterschriften – es waren wesentlich die Algebraiker – gegeben[5], was diesem, wie er sagte, sehr recht war, obwohl natürlich im Augenblick schwer über

§3 [6] hinwegzukommen sei. Ihren Brief bekam er ja dann auch noch! Es scheint mir aber dennoch gut, falls bis zum Ende des Semesters schon genügend Gutachten eingelaufen sind, diese dann dem Kurator zu schicken, und verspätete (Takagi u.s.w.) dann später gesammelt nachzuschicken; wie es heißt soll vorher – im Semester – nicht entschieden werden.[7] Und dann scheint es mir auch richtig, die Gutachten vorher abschreiben zu lassen (aber das auf meine Kosten!), um eventuell später leichter darauf zurückkommen zu können, falls sie im Augenblick keinen Erfolg haben sollten. Die Fassung „Beauftragung mit Spezialvorlesungen jetzt oder später“ scheint mir ja dann auch bei Einsendung der Gutachten die richtigste.[8] Und jetzt komme ich hoffentlich nicht wieder mit neuen Wünschen.

In der hyperkomplexen Deutung der Klassenkörpertheorie kann ich jetzt auch die Idealfaktorensysteme – also alle Klassen von A/H im zyklischen Fall – erfassen. Ich bilde den Modul $\mathcal{O} + u\mathcal{O} \ldots + u^{n-1}\mathcal{O}$ mit $u^n\mathcal{O} = \mathfrak{a}\mathcal{O}$; dieser läßt sich dann und nur dann in eine Algebra einbetten – d.h. daß die Rechenregeln des Moduls, insbesondere $u^n\mathcal{O} = \mathfrak{a}\mathcal{O}$, durch die Rechenregeln von $Z + uZ + \ldots + u^{n-1}Z$ mit $u^n = \alpha$ induziert sind – , wo die Algebra noch an den Verzweigungsstellen von Z zerfallen soll, wenn $\mathfrak{a}$ in H liegt. (Ist $\mathfrak{a} = N(\mathfrak{A}) \cdot \alpha$, so ergibt $v = u\mathfrak{A}$ den Modul $\mathcal{O} + v\mathfrak{A} + v\mathfrak{A}\mathfrak{A}^S + \ldots$, der in $v^n = \alpha$ liegt, und umgekehrt bekommt man so alle $\mathcal{O}$-Moduln, derart daß v zu u assoziiert im verschränkten Produkt der Idealgruppe $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{G}$, also in der Erweiterung von $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{G}$).[9]

Den von H verschiedenen Klassen entsprechen also „Integrale“ (nicht einbettbare Moduln), deren „Differentiale“ aber wieder Algebren werden. Denn sei $\mathfrak{p}$ prim zu den Verzweigungsstellen von Z (was ja auch für u angenommen ist), so läßt sich $\mathcal{O}_\mathfrak{p} + u\mathcal{O}_\mathfrak{p} + \ldots$ mit $u^n\mathcal{O}_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}\mathcal{O}_\mathfrak{p} = a\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ mit a in $k_\mathfrak{p}$ *immer* einbetten; wegen $\mathfrak{a}$ prim zum Führer ergeben *alle* Elemente von $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ dieselbe Algebra. Man bekommt so also als „Differentiale“ endlich viele Komponenten $A_{\mathfrak{p}_1}, \ldots, A_{\mathfrak{p}_r}$, deren Invariantensumme aber von Null verschieden ist. (Reziprozitätsgesetz[10], also für Z Kreiskörper elementar beweisbar).[11] Umgekehrt läßt sich jedes Differentialsystem durch geeignete Kreiskörper K so erzeugen. (Existenzsatz (0.3), Ann. 107).[12] Das Reziprozitätsgesetz sagt also nur aus, daß ein „echtes“ „Integral“ über Z auch über einem erzeugenden Kreiskörper echt bleibt; d.h. daß das zugehörige Differentialsystem durch ein Kreiskörper-Integral, nicht durch eine Algebra erzeugt wird. Vielleicht läßt sich das mit der Durchkreuzungsmethode direkt beweisen! Und damit alles ohne Normensatz.[13] Ich habe es noch nicht überlegt, kann auch für die Richtigkeit dieser Skizze noch nicht absolut einstehen!

In diesem Zusammenhang interessiert mich aber, ob sich Ihr Existenzsatz (0.3) im allgemeinen etwa auch elementar beweisen läßt, so wie Sie es für $\nu = 1$ in der Ausarbeitung gemacht haben.[14] Und weiter hätte ich sehr gern Korrektur oder Durchschlag der These von Chevalley, falls so etwas existiert; denn ich habe den Eindruck, daß die obige Skizze nur eine andere Einkleidung seiner Überlegungen bedeutet.[15]

War Ihnen bekannt, daß über algebr[aischen] Funktionenkörpern einer Variablen (vielleicht auch von n Variablen) mit algebr[aisch]-abgeschlossenen, also insbes[ondere] komplexen Koeffizienten, keine Divisionsalgebren existieren; der Satz von den zerfallenden Algebren also in trivialer Weise gilt? Tsen, der Chinese, hat es

jetzt nach meinen Angaben bewiesen.[16] Man zeigt einfach durch Koeffizientenvergleich und Abzählen der Gleichungen, daß jedes Element des Grundkörpers Norm wird; dann macht man unsern Übergang vom Zyklischen zum Allgemeinen.[17]

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether

Anmerkungen zum Dokument vom 21.6.1933

[1]Beachte die veränderte Anrede gegenüber den früheren und späteren Briefen, wo es stets heißt: „Lieber Herr Hasse“. Nach den damaligen Gepflogenheiten bedeutete die Weglassung des formellen „Herr“ einen besonderen Beweis der freundschaftlichen Verbundenheit – hier offenbar angesichts des „Pfingstbriefes“.

[2]Im Jahr 1933 fiel Pfingsten auf den 4. Juni. – Zwischen dem vorangegangenen Brief vom 10. Mai 1933 und diesem Brief gab es noch eine Postkarte von Emmy Noether an Hasse, die jedoch nicht erhalten ist. Wir schließen das aus einem Brief von Hasse an Davenport vom 18. 5. 1933. Davenport hielt sich damals in Göttingen auf, und Hasse schrieb ihm: „*Please say E. Noether thanks for the delightful postcard.*“

[3]Hasse war dabei, Gutachten namhafter Kollegen (auch aus dem Ausland) über die wissenschaftliche Bedeutung Emmy Noethers einzuholen; diese wollte er dem Ministerium vorlegen, um zu erreichen, dass Noether in Göttingen weiterhin arbeiten durfte.

[4]Wolfgang Wichmann war ein Doktorand Noethers. Er legte seine Doktorprüfung 1934 ab. Seine Dissertation [Wic36] mit dem Titel „Anwendungen der p-adischen Theorie im Nichtkommutativen“ war noch von Emmy Noether angeregt worden. Der wesentliche Inhalt seiner Arbeit war eine vereinfachte Herleitung der Funktionalgleichung der ζ-Funktion einer zentralen einfachen Algebra, die bis auf ein offen bleibendes Vorzeichen mit der von Käte Hey gefundenen Funktionalgleichung übereinstimmt [Hey29], [Zor33]. Formal zeichnete F. K. Schmidt als Referent seiner Dissertation. – Wichmann wurde übrigens in der Arbeit von Tsen [Tse33] erwähnt, die als Voranzeige seiner Dissertation erschien. Tsen hatte Funktionenkörper einer Variablen über algebraisch abgeschlossenem Körper untersucht und gezeigt, dass es über einem solchen Körper keine nichttrivialen Divisionsalgebren gibt. Wie Tsen berichtet, hatte ihn Wichmann dann darauf hingewiesen, dass als Folge davon, über einem reell abgeschlossenen Körper jede Divisionsalgebra den Index 2 besitzt, also eine (verallgemeinerte) Quaternionenalgebra ist. Vgl. Brief vom 21. 7. 1933.

[5]Zwölf Doktoranden oder ehemalige Schüler Emmy Noethers hatten eine Petition zu Noethers Gunsten eingereicht. Diese Information entnehmen wir dem Artikel [Sch87].

[6]§3 war der Arierparagraph des neuen Gesetzes.

[7]Bei Schappacher [Sch87] wird berichtet, dass Hasse schliesslich 14 Gutachten von führenden Mathematikern vorlegen konnte. – Hermann Weyl in seiner Trauerrede auf Emmy Noether in Bryn Mawr am 26.4.1935 berichtete: „*I suppose there could hardly have been in any other case such a pile of enthusiastic testimonials filed with the Ministerium as was sent in on her behalf. At that time we really fought; there was still hope left that the worst could be warded off. It was in vain.*“ [Wey35].

[8]Hasse hatte offenbar in seinem Brief an den Kurator der Universität Göttingen vorgeschlagen, man möge Noether mit Spezialvorlesungen vor einem engeren Schülerkreis beauftragen – was im übrigen ihrer bisherigen Tätigkeit durchaus entsprach.

[9]Offenbar nimmt Noether an, dass Hasse bereits weiß, worum es geht, und dass er auch mit den Bezeichnungen vertraut ist, die sie nicht weiter erklärt. Noether betrachtet die folgende Situation: Gegeben sei ein Zahlkörper K (der bei Noether nicht explizit erwähnt ist) und eine zyklische Erweiterung $Z|K$. Die Galoisgruppe wird mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet, und S ist eine fest gewählten Erzeugende von $\mathfrak{G}$. Wenn Noether von der Gruppe A/H spricht, dann benutzt sie die Bezeichnungen in der Ausarbeitung [Has33d] der Hasseschen Marburger Vorlesungen. Demnach ist A die Gruppe der zum Führer $\mathfrak{f}$ von $Z|K$ teilerfremden Divisoren von K, und H ist diejenige Untergruppe von A, die zu Z im Sinne der Klassenkörpertheorie gehört. Also besteht H aus den Divisoren der Form $\alpha N(\mathfrak{A})$ wobei $N(\mathfrak{A})$ die Norm eines zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Divisors $\mathfrak{A}$ von Z ist, und $\alpha \in K^{\times}$ Normenrest modulo $\mathfrak{f}$ ist. Die letztere Bedingung drückt Noether dadurch aus, dass „die Algebra“ an den Verzweigungsstellen von Z zerfallen soll, gemeint ist das durch α

definierte verschränkte Produkt $(Z|K, S, \alpha)$. Nach evtl. Abänderung von α durch Normen kann angenommen werden, dass $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$.

Noether bezeichnet mit $\mathfrak{J}$ die Gruppe der zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Divisoren von Z, sodass also A die Fixgruppe von $\mathfrak{J}$ unter der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ ist. Weil $\mathfrak{G}$ zyklisch ist, kann die Normfaktorgruppe $A/N(\mathfrak{J})$ aufgefasst werden als die Kohomologiegruppe $H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{J})$ (nach Festlegung der Erzeugenden S von $\mathfrak{G}$). Demgemäß definiert jedes $\mathfrak{a} \in A$ eine Gruppenerweiterung von $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{G}$. Noether spricht auch von einem „verschränkten Produkt" von $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{G}$.

Wir hatten einige Schwierigkeiten, die von Noether als „Moduln" bezeichneten Bildungen $\mathcal{O} + u\mathcal{O} + \cdots + u^{n-1}\mathcal{O}$ mit $u^n = \mathfrak{a}\mathcal{O}$ zu interpretieren. Nach den sonstigen Gepflogenheiten von Noether wäre $\mathcal{O}$ als die Hauptordnung des Körpers Z zu interpretieren, was jedoch hier keinen Sinn ergibt. Wahrscheinlicher ist es, dass hier $\mathcal{O}$ den Bereich der Ideale der Hauptordnung bezeichnet; für Ideale sind Multiplikation und Addition definiert, sowie Anwendung des Automorphismus S. Die Bedeutung dieses „Moduls" spielt jedoch bei den weiteren Noetherschen Überlegungen keine Rolle; die „Moduln" stehen in bijektiver Beziehung zu den Kohomologieklassen in $H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{J})$, also zu den Elementen $\mathfrak{a} \in A$ modulo der Normgruppe $N(\mathfrak{J})$. Bei Noether handelt es sich (aus heutiger Sicht) um rein kohomologische Betrachtungen.

Eine Kohomologieklasse (Modul) wird von Noether „einbettbar" genannt, wenn sie von einer Algebra induziert wird, also von einer Kohomologieklasse aus $H^2(\mathfrak{G}, Z^\times)$, d.h. von einem Element $\alpha \in K^\times$ (modulo Normen). Die Algebra soll aber, wie Noether sagt, an den verzweigten Stellen zerfallen; das bedeutet $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$. Somit besteht H genau aus den „einbettbaren" Kohomologieklassen (Moduln).

[10][*Diese Fußnote stammt von Emmy Noether:*] Hier benutze ich, daß wenn $\left(\frac{Z}{\mathfrak{a}}\right) = S^\rho$, zugleich $-\rho/n$ die Invariantensumme des Differentialsystems.

[11]Die Noetherschen „Differentiale" werden also durch Lokalisierung definiert. Für eine Primstelle $\mathfrak{p}$ bezeichnen wir mit $Z_\mathfrak{p}|K_\mathfrak{p}$ die zugehörige lokale Erweiterung; sie ist zyklisch und ihre Galoisgruppe $\mathfrak{G}_\mathfrak{p}$ is die Zerlegungsgruppe für $\mathfrak{p}$. Noether benutzt nun die Isomorphie

$$H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{J}) \approx \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}} H^2(\mathfrak{G}_\mathfrak{p}, Z_\mathfrak{p}^\times)\,.$$

Diese folgt daraus, dass für $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$ die Erweiterung $Z_\mathfrak{p}|K_\mathfrak{p}$ unverzweigt ist, also die lokale Einheitengruppe kohomologisch trivial. Die Isomorphie wird dadurch induziert, dass jedem Idèle von Z, das zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd ist, sein Divisor aus $\mathfrak{J}$ zugeordnet wird.

Vermöge dieser Isomorphie entspricht nun jedem Faktorensystem aus $H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{J})$, also jedem $\mathfrak{a} \in A$ (modulo Normen) ein System von Algebren $A_\mathfrak{p} \in H^2(\mathfrak{G}_\mathfrak{p}, L_\mathfrak{p}^\times)$. Dies sind die „Differentiale" von Noether. Davon sind nur endlich viele nichttrivial; diese werden von Noether mit $A_{\mathfrak{p}_1}, \ldots, A_{\mathfrak{p}_r}$ bezeichnet. Noether bildet die Summe ihrer Invarianten; sie gibt dafür jedoch keine Bezeichnung an. Wir wollen sie $j(\mathfrak{a})$ nennen, also $j(\mathfrak{a}) \equiv \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}} j_\mathfrak{p}(A_\mathfrak{p}) \bmod 1$.

Noether stellt fest, dass $j(\mathfrak{a}) \equiv 0 \bmod 1$ für $\mathfrak{a} \in H$ (also für „einbettbare Moduln"), aber $j(\mathfrak{a}) \not\equiv 0 \bmod 1$ für $\mathfrak{a} \notin H$, und sie verweist dafür auf das Reziprozitätsgesetz. In der Tat, wenn man das Reziprozitätsgesetz, wie Hasse es getan hat, als Summenformel für die Invarianten einer einfachen zentralen Algebra über K formuliert, so ergibt das, angewandt auf die Algebra $(Z|K, S, \alpha)$ sofort $j(\alpha) \equiv 0 \bmod 1$. Umgekehrt: wenn $j(\mathfrak{a}) \equiv 0 \bmod 1$, so gibt es nach Hasse eine einfache zentrale Algebra über K mit denselben Invarianten $j_\mathfrak{p}(A_\mathfrak{p})$, und da diese Algebra durch Z zerfällt wird (nach dem Lokal-Global Prinzip) so entspricht sie einem Faktorensystem in $H^2(\mathfrak{G}, Z^\times)$, also einem $\alpha \in K^\times$ (modulo Normen), welches noch an den verzweigten Stellen Normenrest ist.

[12]Noether bezieht sich auf die Hassesche Arbeit in den Mathematischen Annalen [Has33b], also die „Geburtstagsarbeit" für Emmy Noether.

[13]Hier haben wir die Begründung, weshalb Noether diese ganze Sache aufrollt. Sie möchte die Klassenkörpertheorie rein algebraisch entwickeln, also ohne den Furtwänglerschen Normensatz, der ja auf analytischen Betrachtungen fußt. Ohne diese Zielsetzung wären diese ganzen kohomologischen Rechnungen nicht sehr interessant, insbesondere weil sie auch schon in den Artin-Briefen vorkommen (und zwar ohne Beschränkung auf zyklische Erweiterungen), die Noether ja gekannt hat. Vgl. Brief vom 5. 4. 1932.

[14]Es handelt sich um einen Existenzsatz über Kongruenzklasseneinteilungen der rationalen Zahlen mit vorgegebenen Eigenschaften. Ein solcher Existenzsatz wurde schon von Artin (1927)

bei seinem Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes formuliert und bewiesen. Eine Verallgemeinerung davon hatte Hasse als Satz (0.3) in [Has33b] formuliert. Die Beweise waren jedoch nicht elementar, denn sie beruhten auf dem Frobeniusschen Dichtigkeitssatz. Einen elementaren Beweis für den Artinschen Spezialfall lieferte Hasse in der Ausarbeitung seiner Marburger Vorlesungen [Has33d], auf die sich Noether hier bezieht; dort handelt es sich um den Satz (139). Dabei ist „elementar“ hier und im folgenden so zu verstehen, dass keine Sätze aus der algebraischen Zahlentheorie benutzt werden, und auch nicht der Dirichletsche Satz von der Existenz von Primzahlen in arithmetischen Progressionen. Auch Chevalley gab in seiner Thèse einen in diesem Sinne elementaren Beweis. Noether fragt nun, ob sich auch der allgemeine von Hasse formulierte Satz (0.3) elementar beweisen lässt. Das ist in der Tat der Fall. Ein Beweis wurde von van der Waerden gegeben; allerdings wohl erst *nach* dem Datum dieses Briefes. Es gibt einen Brief von Hasse an Davenport vom 15. 10. 1933, in dem Hasse an das Problem dieses Existenzsatzes erinnert und wo es heißt: „*It may interest you that v. d. Waerden found a very simple elementary proof.*“ Wie es scheint, hatte Noether die Frage nicht nur an Hasse, sondern auch an van der Waerden gestellt, und der letztere hat dann die Lösung gefunden. Der van der Waerdensche Beweis erschien 1934 im Crelleschen Journal [vdW34].

In den Anwendungen wurde dieser Existenzsatz dazu benutzt, um die Grundeigenschaften der Klassenkörpertheorie, die sich für zyklotomische Erweiterungen ziemlich einfach beweisen lassen, vermöge der sogenannten *Durchkreuzungsmethode* (die von Tschebotareff stammt) auf beliebige abelsche Erweiterungen zu übertragen.

[15] Die Chevalleysche Thèse wurde im Journ. Fac. Sci. Tokyo [Che33b] publiziert; vielleicht war der betr. Band zum Zeitpunkt dieses Briefes noch nicht erschienen. Es kursierten jedoch hektographierte Ausarbeitungen dieser Thèse; es ist anzunehmen, dass Hasse ein Exemplar besaß.

[16] Es handelt sich um Tsen's Doktorarbeit [Tse34]. Die Arbeit wurde niemals in einer mathematischen Zeitschrift publiziert, jedoch erschien eine vorläufige Fassung [Tse33] in den Göttinger Nachrichten. Die Doktorprüfung von Tsen fand erst im Jahre 1934 statt, als Noether bereits in USA war. Als Referent für die Dissertation fungierte offiziell F. K. Schmidt, der als Vertretung von Hermann Weyl in Göttingen damit beauftragt war, alle laufenden Prüfungsarbeiten, die von den in Göttingen entlassenen Hochschullehrern der Mathematik nicht mehr betreut werden konnten, zu übernehmen. – Übrigens gilt der Satz von Tsen *nicht* für Funktionenkörper mehrerer Variablen, wie es Noether hier als „vielleicht“ angibt. Vgl. die folgende Postkarte vom 27. 6. 1933. Siehe auch den Brief vom 21. 7. 1933. – Zu Tsen siehe auch [Lor99].

[17] Wenn Noether von „unserem Übergang“ vom Zyklischen zum Allgemeinen spricht, dann bezieht sie sich auf die Schlussweise, die von Hasse, Chevalley und auch von ihr selbst entwickelt wurde, und die in früheren Briefen zur Sprache kam, vgl. Brief vom 3. 6. 1932. Dort ging es darum, den „Umkehrsatz“ der lokalen Klassenkörpertheorie zu übertragen von zyklischen Körpern auf den Fall beliebiger abelscher Körper. Hier geht es nun darum, den Satz von Tsen in entsprechender Weise zu übertragen.

---

69 27.06.1933, Noether an Hasse, Postkarte

27. 6. 33

Lieber Herr Hasse!

Die hyperkomplexen Überlegungen werde ich etwas ausarbeiten, obwohl ich noch nicht weiß ob es mit der Durchkreuzung geht. Das Artin-Lemma allein schafft es jedenfalls nicht.[1] Das dauert aber noch etwas, weil ich im Augenblick rasch eine Dissertation durchsehen muß (Schwarz). Offiziell geht diese an Weyl.[2]

Nun möchte ich aber von Ihnen wissen, ob nicht Chevalley in Wirklichkeit *alles* arithmetisch hat, oder ob ein Mißverständnis von mir zugrunde liegt? Nach seiner

C.R.[3] (Febr. 32) fehlt ihm nur die Tatsache, daß für Kreiskörper die Klasseneinteilung A/H nach der assoziierten Gruppe übereinstimmt mit der Einteilung nach Artinklassen (Théorème B für Kreiskörper). Das ist aber doch nach Ihrer Ausarbeitung, S. 167 oben, Zeile drei[4], elementar beweisbar – wie machen Sie es übrigens – und deckt sich mit Ihrer Aussage (0.4)[5], die Sie wieder als unmittelbare Folge der Zerlegungsgesetze im Kreiskörper hinstellen. Mit (0.4) arbeite ich natürlich auch. Wer hat unrecht?[6]

Ich hoffe mit meinen Ansätzen auch den ganzen arithmetischen Teil der Klassenkörperth[eorie] besser deuten zu können, nicht nur der Theorie im Kleinen.

Der Satz von Tsen gilt nicht für mehr Variablen, das ist fast unmittelbar klar. Bei einer Variablen und reell-abgeschl[ossenen] Koeff[izienten] gibt es nur „verallgemeinerte Quaternionen".[7]

Herzl. Grüße, Ihre Emmy Noether

Anmerkungen zum Dokument vom 27.6.1933

[1] Wie es scheint, hatte Hasse um eine genauere Ausführung der Noetherschen Überlegungen aus ihrem vorangegangenen Brief vom 21. 6. 1933 gebeten. – Das „Lemma von Artin" hatte Hasse in seinen Marburger Vorlesungen [Has33d] formuliert; es handelt sich um den dortigen Satz (139); vgl. die Anmerkungen zu dem vorangegangenen Brief vom 21. 6. 1933.

[2] Anscheinend war Emmy Noether die Berechtigung entzogen worden, Promotionen durchzuführen. Der Doktorand, Ludwig Schwarz, hatte eine Dissertation mit dem Titel „Zur Theorie des nichtkommutativen Polynombereichs und Quotientenrings" angefertigt. In den Promotionsakten der Fakultät wird Weyl als erster Gutachter und Herglotz als zweiter Gutachter genannt. Die Dissertation Schwarz ist offenbar nicht in einer mathematischen Zeitschrift publiziert worden. In der Göttinger Bibliothek konnten wir sie nicht finden.

[3] C.R. = Comptes Rendus Académie Paris. Es handelt sich um [Che32].

[4] Die Seitenzahl 167 bezieht sich auf die ursprüngliche, hektographierte Ausarbeitung der Hasseschen Marburger Vorlesungen aus dem Jahr 1932 [Has33d]. In der gedruckten Version [Has67] handelt es sich um die Seite 193, 2. Absatz, Zeile 2.

[5] Der Satz (0.4) findet sich in Hasses Annalenarbeit zum 50. Geburtstag von Emmy Noether, und zwar handelt es sich dort um einen der in der Einleitung angegebenen Sätze, die als bekannt angenommen werden.

[6] Es liegt hier, wie Noether vermutete, ein Missverständnis vor, nämlich im Gebrauch des Wortes „elementar" für einen Beweis. Noether, und auch Chevalley, suchen nach einem „arithmetischen" Beweis, bei dem also keine Sätze über analytische Funktionen benutzt werden. Der Hassesche „Satz (0.4)" und auch die entsprechende Aussage auf „Seite 167" beziehen sich auf Kreiskörper. Zum Beweis benötigt man u.a. den Dirichletschen Satz von der Existenz von Primzahlen in einer arithmetischen Progression, und das konnte man damals nur mit Hilfe der analytischen Theorie der L-Reihen beweisen; die Beweise sind also nicht „arithmetisch", wie Noether es eigentlich wünscht, wenn sie unter gewissen Aspekten auch als „elementar" bezeichnet werden können. – Die Tatsache, dass die Klassenkörpertheorie vollständig ohne analytische Hilfsmittel entwickelt werden kann, wurde von Chevalley erst später, in einer C.R. Note [Che35] angekündigt.

[7] Vgl. den vorangegangenen Brief vom 21. 6. 1933. Siehe auch den folgenden Brief vom 21. 7. 1933.

70 21.07.1933, Noether an Hasse

Göttingen, 21. 7. 1933

Lieber Herr Hasse!

Ich habe vorige Woche mit van der Waerden – der wie Artin über Liesche Gruppen vortrug – über Ihren Beweisansatz zu Tsen gesprochen. Er glaubt aber daß es so nicht geht, und zwar weil Sie die Hilfspunkte *fest* nehmen, nur die Anzahl beliebig, um trotz Bildung von Integralen zu *linearen* Gleichungen zu kommen. Er vermutet, daß Ganzzahligkeit der Lösung gewisse Bindungen in der Lage der Punkte verlangt (es gibt kontinuierlich viele Divisoren, aber nur abzählbar viele ganzzahlige Lösungen), sodaß also die Punkte selbst noch als unbestimmt genommen werden müßten, was vermöge der Integrale, zu transzendenten Gleichungen führt. Daß es in diesem Fall Lösungen gibt, zeigt ja gerade das Tsensche Resultat, von dem ich zugebe, daß die Abzählung mit Eliminationstheorie nicht schön ist.[1] Oder sind diese Bedenken hinfällig, und haben Sie oder Chevalley doch einen arithmetischen Beweis? [2]

Davenport sagte so etwas zu Tsen.[3] Seine (Tsens) Note in den Göttinger Nachrichten wird bald erscheinen; er und andere sind für Separata oder Korrekturen Ihrer Arbeiten sehr empfänglich, besonders für Annalen 104 und 107. (Meine Exemplare, 107 mit Korrektur, wandern schon.)[4]

Das Tsensche Resultat läßt sich, wie Witt bemerkt hat, als Analogon zu Ihrem Zyklizitätssatz auffassen. Denn dieser läßt die (abgeschwächte) Formulierung zu: „Über dem Körper *aller* Einheitswurzeln zerfällt jede Algebra“.[5] Und die Konstanten bei Funktionenkörpern sind ja gerade die Elemente, die überall die Ordnungszahl Null haben, also das Analogon der Einheitswurzeln. Aus dieser Bemerkung folgt unmittelbar die zyklische Darstellung der Algebren, deren Zentrum algebraischer Funktionenkörper (*einer* Variablen), mit *Galoisfeld* als Koeffizienten. Denn als Zerfällungskörper läßt sich ja eine *endliche* Erweiterung der Galoisfelder, ein „zyklischer Kreiskörper“ nehmen. Witt hofft mit diesem Ansatz die Klassenkörpertheorie im Fall von F.K. Schmidt rein arithmetisch-hyperkomplex aufbauen zu können;[6] Algebren (der Invariantensumme Null) kann er bei vorgegebenen Invarianten einfach explizit hinschreiben; der Normensatz fehlt aber noch! [7]

Witt wird diese Woche – er hat auf einmal angefangen zu arbeiten und nicht nur zu vereinfachen[8] – promovieren und zwar mit dem „Riemann-Rochschen Satz im Hyperkomplexen“.[9] Ich sprach wohl schon im Winter von der Fragestellung, auf die ich durch die Note von Zorn gekommen war.[10] Ich dachte aber nicht daß sich einfach F. K. Schmidt[11] auf „einseitige Divisoren“, die ich noch nicht hatte (aus den einseitigen Idealen verschiedener Stellen zusammengesetzt), würde übertragen lassen, was tatsächlich der Fall, nur daß das Geschlecht G der Divisionsalgebra

sich von dem g des Zentrums um die Verzweigungsordnungen unterscheidet, sonst alles wörtlich! Und zwar bei *beliebigem* Koeffizientenbereich. Bei Galoisfeld als Koeffizienten kommt dann Funktionalgleichung der hyperkomplexen ζ-Funktion, Satz von den zerfallenden Algebren u.s.w. heraus. Hier hat Witt auch die Beispiele der Algebren aufgenommen.[12]

Mit Hilfe der nach Tsen existierenden konstanten Zerfällungskörper hoffe ich daß man jetzt auch an algebraische Funktionen mit rationalzahligen Koeffizienten heran kann – das interessierte Artin besonders. Als Vorbereitung denke ich, erst einmal Algebren diskutieren zu lassen, wo das Zentrum algebraischer Funktionenkörper mit $\mathfrak{p}$-adischen Koeffizienten, so wie Tsen es augenblicklich bei reellen Koeffizienten macht.[13] Mit all dem habe ich aber die neulich angedeuteten hyperkomplexen Klassenkörperüberlegungen immer noch nicht fertig aufgeschrieben: ich glaube auch daß es sich mehr um formale als um materielle Vereinfachungen handelt; mit Ersetzen transzendenter Beweise durch arithmetische muß man jetzt erst einmal Deuring – Bauerscher Satz u.s.w.[14] – abwarten; Chevalley hat Ihnen das doch wohl erzählt![15] Könnte man übrigens vorher die Existenz von Primidealen vom Relativgrad *eins* arithmetisch beweisen? Aus dem Bauerschen Satz folgt sie ja unmittelbar! Sie sagt zu den obigen Überlegungen aus: bildet man die Erweiterung der Gruppe J der *Ideale* (nicht Idealklassen) mit der galoisschen Gruppe G von K/k, so wird G isomorph und nicht nur homomorph zu der erzeugten Automorphismengruppe (denn die Primideale vom Relativgrad eins nehmen n verschiedene Werte an, spielen gewissermaßen die Rolle der primitiven Elemente).

Ich sehe auch daß ich zu Ihrer Frage von neulich – Relationen zwischen Gauss'schen Summen – noch nichts geantwortet habe. Ich weiß nur daß die angegebene Multiplikation sich als Komposition von Galoismoduln im p-ten Kreiskörper deuten läßt; die „Konstante" $\psi^m(m)$ muß also zugehöriges Faktorensystem sein; ersetzt man dieses durch Eins, so muß es sich um Komposition von Darstellungen der zyklischen Gruppe vom Grad $(p-1)$ handeln. Ob um bekannte Komposition, weiß ich nicht. Können Sie damit etwas anfangen? Oder ist Ihnen soviel auch bekannt?[16]

Werden Sie autofahrend nach Würzburg kommen, und über diese Riemann-Vermutungen vortragen?[17] Ich bin mir noch nicht klar, ob ich hingehen soll. Vorerst will ich mich mit meinen Geschwistern an der Ostsee treffen: Adresse ab 31. Juli: Dierhagen bei Ribnitz, Mecklenburg.

Weyl wollte übrigens wegen des Einreichetermins der Gutachten nochmal mit dem Kurator sprechen: Er fing zufällig von seinem Gutachten an, glaubte daß das ganze bald eingereicht würde. Eventuell bekommen Sie also noch mal Nachricht. Es müßten dann aber – das war auch Weyls Ansicht – auf jeden Fall Abschriften genommen werden die *Sie* in der Hand behielten. Falls Ihnen das in Marburg unangenehm wäre, könnte es natürlich auch hier gemacht werden.[18]

Ich habe in einem Fragebogen, den ich jetzt noch bekam, angegeben, daß Klein und Hilbert mich Frühjahr 1915 zur Vertretung der Privatdozenten nach Göttingen geholt haben. Um daraus zu schließen daß ich August 1914 schon alle Vorbedingungen erfüllt habe, bedarf es allerdings eines ziemlich imaginären Wohlwollens! Weiter habe ich so meine sozialistische (vorher 1919-22, unabhän-

gig-soz.) Parteizugehörigkeit, bis 1924, zu Papier gebracht; weiter links habe ich übrigens nie gewählt!

Nun herzliche Grüße! Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 21.7.1933

[1]Der Beweisansatz von Hasse zum Satz von Tsen ist uns nicht bekannt. Da aber Noether davon spricht, dass es „in diesem Fall Lösungen gibt", so erscheint es wahrscheinlich, dass es sich um den zweiten Teil des Satzes von Tsen handelt, bei dem es sich um Funktionenkörper über dem *reellen* Grundkörper $\mathbb{R}$ handelt, wo es tatsächlich echte Divisionsalgebren gibt. Allerdings behandelt Tsen im wesentlichen nur den rationalen Funktionenkörper $\mathbb{R}(x)$. Wie es scheint, hatte Hasse für beliebige Funktionenkörper über $\mathbb{R}$ einen Lösungsansatz, der mit abelschen Integralen arbeitete. In diesem Zusammenhang finden wir es interessant, dass in der Arbeit [Wit34c] ebenfalls mit abelschen Integralen gearbeitet wird. Dort gibt Witt, über Tsen hinausgehend, eine explizite Beschreibung sämtlicher Divisionsalgebren über einem beliebigen Funktionenkörper einer Variablen mit Konstantenkörper $\mathbb{R}$.

[2]Wie im vorangegangenen Brief vom 27.6.1933 scheint Noether auch hier das Attribut „arithmetisch" als Gegensatz zu „analytisch" zu verstehen. Im vorliegenden Fall handelt es sich offenbar darum, ohne die analytische Theorie der abelschen Integrale auszukommen, und zwar (wenn unsere Interpretation in der vorangegangenen Anmerkung zutrifft) für Funktionenkörper über $\mathbb{R}$. Der Fall des rationalen Funktionenkörpers $\mathbb{R}(x)$ wurde ja in der Dissertation von Tsen bereits mit „arithmetischen" Methoden behandelt, jetzt geht es also um Funktionenkörper höheren Geschlechts; nur für diese hat ja auch die Theorie der abelschen Integrale eine Bedeutung.

Ein Ansatz zu arithmetischen Beweisen im Sinne von Emmy Noether findet sich erst sehr viel später in den Arbeiten [Gey66], [Gey77]. Die volle „Arithmetisierung", gültig für beliebige reell abgeschlossene Konstantenkörper, wurde jedoch erst durch Einsatz der sog. semi-algebraischen Geometrie geliefert, mit deren Hilfe sich die Zusammenhangskomponenten einer reellen Kurve „arithmetisch" definieren lassen. Vgl. die Kommentare von Claus Scheiderer zu [Wit34c], abgedruckt in den Gesammelten Abhandlungen [Wit98], sowie die dort angegebene Literatur.

[3]Wie bereits in den Anmerkungen zum Brief vom 10. 5. 1933 gesagt, hielt sich Davenport im Sommersemester 1933 in Göttingen auf, traf sich aber häufig mit Hasse in Marburg. Chevalley war im Sommersemester 1933 in Marburg.

[4]Hasse's Arbeit in Band 104 der Mathematischen Annalen [Has31d]: „*Über $\wp$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme.*" Seine Arbeit in Band 107 [Has33b]: „*Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper. Insbesondere Begründung der Theorie des Normenrestsymbols und Herleitung des Reziprozitätsgesetzes mit nichtkommutativen Mitteln.*" Offenbar hatte Noether von der letztgenannten Arbeit auch ein Korrektur-Exemplar erhalten, das sie jetzt ihren Studenten zur Verfügung gestellt hat, wo es also „wandert".

[5]Das folgt in der Tat aus Hasses Resultaten in seiner Arbeit in Annalen 107 [Has33b]. Hasse benötigte diesen Satz, um einen neuen Beweis des Artinschen Reziprozitätsgesetzes mit Hilfe der Algebrentheorie zu geben.

[6]Unter dem „Fall von F. K. Schmidt" versteht Emmy Noether die algebraischen Funktionenkörper einer Variablen mit endlichem Konstantenkörper. Zwar hatte F. K. Schmidt schon damit begonnen, in diesem Fall die Klassenkörpertheorie zu entwickeln, allerdings nicht „arithmetisch-hyperkomplex", wie Noether das jetzt wünscht, sondern unter Benutzung der analytischen L-Funktionen. Außerdem konnte er nur den Fall behandeln, dass die Grade der abelschen Erweiterungen nicht durch die Charakteristik p des Körpers teilbar sind. Vgl. [Sch31b]. (In einem Brief an Hasse vom 6. 12. 1926 weist F. K. Schmidt auf die Schwierigkeiten hin, die vorliegen, wenn p den Grad teilt, und er schreibt: „*Diese Ausnahme hat mich bei meinen Untersuchungen nicht interessiert, und ich habe sie daher von vorneherein ausgeschlossen.*")

[7]Dieselbe Idee benutzte Hasse in seiner Arbeit über zyklische algebraische Funktionenkörper [Has34c], nämlich den Beweis der Summenformel für Algebren (und damit das Artinsche Reziprozitätsgesetz) mit Hilfe des Satzes von Tsen zu führen. Hasse folgte damit dem Procedere in

seiner Arbeit zum 50. Geburtstag von Emmy Noether [Has33b]; nur ist die Situation hier viel einfacher, weil die Konstantenerweiterungen unverzweigt sind. Daraus leitet dann Hasse auch den Normensatz ab. – Für einen *rationalen* Funktionenkörper als Grundkörper gibt allerdings Hasse noch einen zweiten Beweis des Reziprozitätsgesetzes, der sich nicht auf den Satz von Tsen stützt. Später ist diese zweite Beweisidee auf Funktionenkörper beliebigen Geschlechts verallgemeinert worden, u.a. durch H. L. Schmid und Witt, siehe [Roq01].

[8] Witt galt schon als junger Student als ein Meister im Auffinden besonders einfacher Beweise. In [Wit31] war sein Beweis für die Kommutativität endlicher Schiefkörper erschienen, der weniger als eine Seite beanspruchte.

[9] Witt selbst sagt in seinem Vorstellungsbericht vor der Göttinger Akademie (1983): „*Tief beeindruckt haben mich 1932 die berühmten 3 Vorträge von Artin über Klassenkörpertheorie. Die anschließenden Ferien verbrachte ich in Hamburg, um dort die Klassenkörpertheorie für Zahlkörper intensiv zu studieren. In den folgenden Jahren war es mein Ziel, diese Klassenkörpertheorie auf Funktionenkörper zu übertragen. Der erste Schritt führte zu meiner Promotion 1933...*“ Vgl. [Wit98]. – Ina Kersten berichtet in ihrer Witt-Biographie [Ker00], dass Witt sich sein Dissertationsthema, nämlich die Bearbeitung eines durch Emmy Noether gestellten Problems, selbst ausgesucht hatte. Er begann am 1. 7. 1933 mit der Arbeit und lieferte die fertige Dissertation eine Woche später ab, am 7. 7. 1933. Die von Noether gestellte Aufgabe verlangte, die Methoden der Heyschen Dissertation (mit der Zornschen Ergänzung) für algebraische Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper zu entwickeln. Das entsprach durchaus seinem erklärten Ziel, die Sätze der Klassenkörpertheorie auf den Fall von Funktionenkörpern zu übertragen.

[10] Die Note von Zorn in den Hamburger Abhandlungen [Zor33] zeigte auf, dass nach gewissen Korrekturen und Ergänzungen die Hamburger Dissertation von Käte Hey [Hey29] geeignet ist, einen Beweis des Lokal-Global-Prinzips für Algebren über Zahlkörpern zu liefern. Und zwar handelt es sich um einen analytischen Beweis, mit Hilfe der Zetafunktion einer Algebra. Zorn hatte seine Arbeit im Januar 1933 der Redaktion der Hamburger Abhandlungen vorgelegt. Offenbar hatte Noether schon vor der Drucklegung Kenntnis von dem Zornschen Resultat gehabt, denn sie sagt, dass sie schon im Winter von der Fragestellung gesprochen habe.

[11] Gemeint ist der von F. K. Schmidt aufgestellte Riemann-Rochsche Satz für Funktionenkörper einer Variablen über vollkommenen Konstantenkörper [Sch31a].

[12] Die Dissertation [Wit34a] erschien in den Mathematischen Annalen.

[13] Algebren über Funktionenkörpern einer Variablen mit dem reellen Konstantenkörper $\mathbb{R}$ wurden systematisch in [Wit34c] untersucht. Der Fall $\mathfrak{p}$-adischer Grundkörper ist ungleich schwieriger. In [Wit37a] werden Schiefkörper über diskret bewerteten Körpern untersucht.

[14] Deurings *arithmetischer* Beweis für den Satz von Bauer beruht auf Teilaussagen der Klassenkörpertheorie und erschien im Crelleschen Journal [Deu35b]. Der Satz von Bauer besagt u.a., dass ein Galoisscher Erweiterungskörper eines algebraischen Zahlkörpers durch die Menge der in ihm zerfallenden Primdivisoren eindeutig bestimmt ist. Bauers ursprünglicher Beweis stammte aus dem Jahre 1916 und benutzt Hilfsmittel aus der *analytischen* Zahlentheorie. – Vgl. auch Brief vom 13.9.1933.

[15] Chevalley hielt sich im Sommersemester 1933 in Marburg bei Hasse auf. Offenbar hatte er von dort aus Emmy Noether in Göttingen besucht und die neuesten mathematischen Nachrichten erfahren.

[16] Zu diesem Zeitpunkt beschäftigte sich Hasse mit dem Analogon der Riemannschen Vermutung in Funktionenkörpern mit endlichem Konstantenkörper. Der Beweis für elliptische Körper war Hasse im Februar 1933 gelungen. Nunmehr untersuchte er, zusammen mit seinem Freund Davenport, gewisse Funktionenkörper höheren Geschlechts; heute werden sie Funktionenkörper „vom Davenport-Hasseschen Typus“ genannt. Vgl. [DH34]. Für diese Funktionenkörper ist es möglich, die Nullstellen der zugehörigen Zetafunktion durch Gauss'sche Summen darzustellen. Zu diesem Zweck war es notwendig, die Theorie der Gauss'schen Summen in geeigneter Weise zu verallgemeinern. Hasse deutete die sog. Jacobischen Summen als durch Gauss'sche Summen definierte Faktorensysteme, und das scheint Noether zu interessieren. Vgl. auch die diesbezügliche Anmerkung zum nächsten Brief vom 7.9.1933.

[17] In Würzburg fand im September 1933 die Jahrestagung der DMV statt. Hasse sprach dort über seinen Beweis der Riemannschen Vermutung für elliptische Funktionenkörper.

[18] Betr. Gutachten vgl. Brief vom 21. 6. 1933.

71 07.09.1933, Noether an Hasse

Göttingen, 6./7. 9.33

Lieber Herr Hasse!

Ich habe erst nach meiner Rückkehr vorige Woche – Ihr Oberstdorf-Aufenthalt ist doch wohl auch zu Ende? – gehört daß Sie auch zum Einreichen der Gutachten noch mit einem Brief helfen mußten. Also wirklich recht herzlichen Dank für alle Ihre Mühe! Wenn nicht für gleich, so helfen die Gutachten doch vielleicht für später! Und daß sie jetzt vorliegen, scheint mir nur richtig zu sein! [1]

Daß ich nach Weihnachten für einen Term nach Oxford gehen will, haben Sie ja durch Davenport gehört. Unterdes bekam ich noch eine Aufforderung für eine Research-Professur in Bryn Mawr für ein Jahr (1933/34), die ich für das folgende 34/35 angenommen habe. Ich habe noch keine Antwort darauf, denke aber daß die Verschiebung – ich kann ja nicht zugleich in England und Amerika sein – keine Schwierigkeiten macht. Das Stipendium kommt gemeinsam von Rockefeller und dem Komittee „in Aid of Displaced German Scholars". Bryn Mawr ist übrigens wieder Frauen-College, aber wie Veblen mir nachträglich schrieb, das beste unter diesen; und außerdem so nahe bei Princeton daß ich oft rüberkommen sollte. Im übrigen muß man ja auch erst die hiesigen Entscheidungen abwarten.[2] (Courant hat für den Winter eine Aufforderung nach Cambridge, Weyl hält bis Anfang Dezember Vorträge in Amerika; ob Landau liest, weiß man noch nicht.)

Ich hoffe daß aus der Vertretung von F.K. Schmidt etwas wird[3], und daß auch Sie wieder einmal zu einem Vortrag in der Math. Gesellschaft – aber dann wenn ich da bin! – kommen. Denn nach Würzburg[4] werde ich nach einem mir vernünftig scheinenden Vorschlag von Blaschke, den ich mit Rademacher an der See traf, vermutlich nicht kommen. Blaschke meinte, es käme vor allem darauf an, daß die Mathematiker-Vereinigung ihren rein wissenschaftlichen, neutralen Charakter bewahrt, und daß die andern Fragen überhaupt nicht aufgeworfen werden. Das könnte möglicherweise durch meine diesjährige Anwesenheit erschwert werden. Es scheint mir richtiger als der erste Vorschlag von Rademacher, man sollte erst recht alle Beurlaubten auffordern, da es sich um Mathematiker und nicht um Professoren handle; besonders deshalb auch richtiger weil vermutlich die meisten doch nicht kommen würden, und eine unnötige Prinzipienfrage entstünde. Blaschke dachte übrigens daran mit Ihnen auch über die ganzen Fragen zu korrespondieren; ich weiß nicht ob er es getan hat! Ich glaube er ist jetzt in Genf.

Ich habe mir jetzt nochmal Ihre Gauss'schen Summen angesehen. Was ich neulich schrieb, gibt gerade das „Algebraische" der Relationen; eine arithmetische Überlegung muß dann noch das Faktorensystem $\psi^m(m)$ bestimmen.

Ich benutze aus der Theorie der Galoismoduln: Ist K/k abelsch, aufgefaßt als hyperkomplex über k, so bilde ich die Erweiterung von k zu $\overline{k}$, wo $\overline{k}$ aus k

durch Adjunktion aller Charaktere der Gruppe[5] entsteht. Dann wird $K_{\overline{k}}$ Summe von n Galoismoduln vom Rang eins, die den n Darstellungen ein-eindeutig entsprechen.[6] Jede Darstellung entsteht durch *ein* Basiselement, Bild des Idempotents des Gruppenrings; die Basiselemente sind bis auf Faktoren aus $\overline{k}$ bestimmt. Seien $\tau(\chi_1), \ldots, \tau(\chi_n)$ fest gewählte Basiselemente der n Galoismoduln, also $\tau^S(\chi_i) = \chi_i(S) \cdot \tau(\chi_i)$. Es folgt daß dem Produkt $\tau(\chi_i)\tau(\chi_k)$ der Charakter $\chi_i\chi_k$ entspricht. Genauer: $[\tau(\chi_i)\tau(\chi_k)]^S = \tau^S(\chi_i)\tau^S(\chi_k) = \chi_i(S)\chi_k(S)\tau(\chi_i)\tau(\chi_k)$. Wegen des eineindeutigen Entsprechens von Galoismodul und Darstellung kommt also: $\tau(\chi_i)\tau(\chi_k) = c_{ik}\tau(\chi_i\chi_k)$, wo c_{ik} Element aus $\overline{k}$. Dabei ist bei *gewählter* Basis c_{ik} *eindeutig* bestimmt; durch den Körper *invariant* bestimmt ist dagegen nur die Klasse der c_{ik} mit dem allgemeinen Element $\overline{c}_{ik} = \frac{r_i r_k}{r_{ik}} c_{ik}$, wo die r wieder in $\overline{k}$. (Spezialfall Bestimmung einer reinen Gleichung modulo n-ten Potenzen im zyklischen; es handelt sich um die Invarianten, die Deuring auch im nichtabelschen Fall der Körper-Normalform zugrundelegen wollte.[7]) Die Wiederholung dieser Schlußweise ergibt: „Läßt ein Charakter χ die beiden Zerlegungen zu: $\chi = \psi_1 \cdots \psi_s = \varphi_1 \cdots \varphi_t$, so gilt für die zugehörigen Basiselemente: $\tau(\psi_1) \cdots \tau(\psi_s) = c \cdot \tau(\varphi_1) \cdots \tau(\varphi_t)$ mit c in $\overline{k}$, c bei festem τ eindeutig bestimmt, durch den Körper bis auf assoziierte invariant bestimmt.“

Eine solche Zerlegung liegt nun bei Ihren Relationen gerade vor:

$$\psi \cdot (\chi\psi) \cdots (\chi^{m-1}\psi) = (\psi^m) \cdot \chi \cdots \chi^{m-1}.$$

Die obige Überlegung ergibt also:[8]

$$\prod_{\mu \bmod m} G(\chi^\mu \psi) \;=\; c \cdot G(\psi^m) \prod_{\mu \not\equiv 0 \bmod m} G(\chi^\mu),$$

ganz allgemein; also auch für K Körper der p-ten Einheitswurzeln, wo nun $G(\chi)$ das festgewählte, natürliche Basiselement der Gaußschen Summen sein soll ($G(\chi)$ ist Basiselement zur Darstellung χ^{-1}; die Charakterenzerlegung gilt ja aber auch in der Form $\psi^{-1}(\chi^{-1}\psi^{-1}) \cdots = (\psi^{-m}) \cdot \chi^{-1} \cdots$). Da hier die *Basis arithmetisch ausgezeichnet* ist – der ganzzahlige Gruppenring ist gerade auf die Hauptordnung von K operatorisomorph abgebildet – ist natürlich auch das *Faktorensystem arithmetisch ausgezeichnet*, was Sie ja auch in Ihrer letzten Karte schon schrieben. Wegen dieser arithmetischen Auszeichnung müssen zur Bestimmung von c natürlich arithmetische Eigenschaften von K herangezogen werden. Die Zerlegung der Wurzelzahlen, aus der Sie, wie Davenport mir sagte, die Relationen genommen haben, erscheinen also, wenigstens für $c = \psi^m(m)$, das Natürliche.

Ihre Betrachtung mit dem verschränkten Produkt ist nur eine andere Deutung der Produktbildung der Galoismoduln bezw. ihrer Basiselemente, kann also auch nur den „algebraischen“ Teil ergeben; das steht ja auch in Ihrer Karte. Die verschiedenen Deutungen der Galoismoduln scheinen mir aber an sich von Interesse.

Schilling[9] hat mir Ende Juli über Marburg berichtet. Die ganzen hyperkomplexen Deutungen zur Klassenkörpertheorie – mehr ist einstweilen nicht übrig geblieben – werde ich jetzt aufschreiben.[10] Deuring kommt heute in Bremen an – er hat sich Amerika noch etwas angesehen – ich werde ihm sagen daß er seinen arithmetischen

Beweis des Bauerschen Satzes (falls er stimmt) bald aufschreibt.[11] Das waren die Bestellungen von Schilling.

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.

Wie geht es der Riemannschen Vermutung der Funktionenkörper?

Anmerkungen zum Dokument vom 7.9.1933

[1]Betr. Gutachten vgl. den vorangegangenen Brief vom 21. 7. 1933, sowie den früheren Brief vom 21. 6. 1933.

[2]Emmy Noether erklärt ihre Pläne für die beiden kommenden Jahre, weil sie in Göttingen entlassen worden war. Was uns hier und auch in ihren anderen Briefen aus dieser Zeit auffällt, ist das Fehlen einer Klage oder Anklage wegen ihrer Entlassung, obwohl sich dadurch ihr äußeres Leben in einschneidender Weise verändern wird, was ihr durchaus bewusst war. Auch scheint immer wieder ihr Optimismus durch, nämlich dass alles nur eine vorübergehende Sache sei und bald wieder „normale“ Verhältnisse eintreten würden. Und vor allem: Nach wie vor sind ihre Briefe voll mit mathematischen Ideen.

[3]F. K. Schmidt, damals Privatdozent in Erlangen, wurde auf Vorschlag von Courant als Vertreter von Weyl nach Göttingen berufen. Er wirkte in dieser Eigenschaft in Göttingen in den Jahren 1933/34 und wurde danach als o. Professor nach Jena berufen.

[4]zur Jahrestagung der Deutschen Mathematiker Vereinigung. Vgl. dazu auch den vorangegangenen Brief vom 21.7.1933.

[5]gemeint ist die Adjunktion der Werte aller Charaktere der Galoisgruppe von K über k.

[6]Offenbar bedeutet n den Körpergrad: $n = [K : k]$.

[7]Hasse hat später diese Normalformen sowohl im abelschen Fall als auch für beliebige Galoissche Erweiterungen in mehreren Publikationen in den Jahren 1948-1950 genauer untersucht.

[8]Die folgende Formel wurde von Hasse im Juni 1933 entdeckt, nachdem Davenport sie in einem Spezialfall ($m = 2$) gefunden hatte. Das ergibt sich aus der Korrespondenz von Hasse mit Davenport. Letzterer hielt sich im Sommersemester 1933 in Göttingen auf und besuchte Hasse in Marburg öfters an den Wochenenden; es gibt aber auch Briefe aus dieser Zeit zwischen Marburg und Göttingen, welche zeigen, dass Hasse und Davenport intensiv mit der Untersuchung von Gauß'schen Summen beschäftigt waren, da diese zur Darstellung der Nullstellen der Zeta-Funktion eines Funktionenkörpers mit der Gleichung $x^m + y^n = 1$ führen.

Es handelt sich in der Formel um folgende Situation: χ und ψ sind Charaktere der Galoisgruppe des Körpers der p-ten Einheitswurzeln (p eine ungerade Primzahl); m und n sind die Ordnungen dieser Charaktere. Noether schreibt $G(\chi)$ für die Gauss'sche Summe zu χ (bei Hasse heißt es $\tau(\chi)$ – jedoch mit einer anderen Normierung, sodass $\tau(\chi)$ Basiselement zur Darstellung χ wird). Wie Noether auseinandersetzt, gilt die angegebene Formel für eine „gewisse“ Konstante c im Körper der $(p-1)$-ten Einheitswurzeln. Dies folgt allein aus den „algebraischen“ Überlegungen, die Noether auseinandersetzt. Durch Bestimmung der Primzerlegung der Gauss'schen Summen konnte Hasse zunächst beweisen, dass c eine m-te Einheitswurzel ist. Er vermutete (und konnte das danach auch beweisen), dass $c = \psi^m(m)$ ist. Offenbar hatte er diese Vermutung Emmy Noether mitgeteilt, da dies in dem Brief angesprochen wird.

Der Beweis findet sich schliesslich in der gemeinsamen Arbeit von Hasse und Davenport im Crelleschen Journal [DH34]. Siehe dort die Formeln (0.9_1) und (0.9_2). Dort ist die Situation noch allgemeiner, indem χ, ψ multiplikative Charaktere irgendeines endlichen Körpers $\mathbb{F}_{p^n}$ sind (nicht nur von $\mathbb{F}_p$).

[9]Zu Schilling vgl. Brief vom 10. 5. 1933.

[10]Hier bezieht sich Noether wieder auf die Ausführungen in ihrem Brief vom 21. 6. 33. Hasse hatte darum gebeten, dass sie ihre Ideen einmal zu Papier bringt.

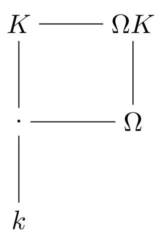
[11]Offenbar hatte sich Hasse nach dem Stand des Deuringschen Manuskripts erkundigt, von dem ihm Noether im Brief vom 21. 7. 1933 berichtet hatte. Die Deuringsche Arbeit [Deu35b] wurde dann von Hasse für das Crellesche Journal angenommen.

72 13.09.1933, Noether an Hasse, Postkarte

13. 9. 33

Lieber Herr Hasse!

Heute kam die venia-Zurückziehung nach §3 [1]; trotzdem können die Gutachten für später noch Wert haben! Nochmal Dank! Deuring wird nach Würzburg kommen, kann Ihnen dann selbst über seine neuen Überlegungen berichten. Der Bauersche Satz ist in Ordnung; der Beweis ist überraschend einfach. Er überträgt Satz 89 des Hilbertschen Zahlberichts auf Strahlklassen; daraus folgt für alle relativ zyklischen Körper K/k unter Beachtung von $h \geq n$, daß es in k Primideale von absolut erstem Grad gibt, die in K nicht ersten Grades bleiben.[2] Dann Übergang zu galoisschem und beliebigem Körper, durch Zerlegungsgruppe und üblichen Schluß.



(Wenn K nicht Unterkörper von Ω, wo K/k galoissch, so $(\Omega K : \Omega) > 1$, und $\Omega K/\Omega$ galoissch: also gibt es in Ω Primideal von absolut erstem Grad, das in ΩK nicht zerfällt, also in k ein solches $\mathfrak{p}$, das in Ω, nicht in K, einen Faktor ersten Grades abspaltet). Der arithmetische Nachweis, daß die relativen Kreiskörper Klassenkörper, geht aber im Augenblick damit noch nicht; es sieht aber nicht mehr so unwahrscheinlich aus.[3]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 13.9.1933

[1] Also die Zurückziehung der *venia legendi*, die Emmy Noether durch ihre Habilitation im Jahre 1919 erworben hatte. Nun durfte Noether keine Vorlesungen mehr in Göttingen halten.

[2] Der Hilbertsche Satz 89 besagt, dass die Idealklassengruppe (im absoluten Sinn) von den Primidealen ersten Grades erzeugt wird. – Die sog. zweite Ungleichung $h \geq n$ der Klassenkörpertheorie konnte damals bereits ohne analytische Hilfsmittel bewiesen werden; daher ist Deurings Beweis als „arithmetisch“ anzusehen.

[3] Hier geht es Noether wieder darum, einen arithmetischen Beweis des Reziprozitätsgesetzes zu finden. Vgl. die Anmerkungen zum Brief vom 27.6.1933.

73 06.03.1934, Noether an Hasse

Bryn Mawr, Pa. U.S.A., 6. 3. 34

Lieber Herr Hasse!

Endlich komme ich dazu, Ihnen für die Separatensendung, die höhere Algebra I und die Karte aus Kassel zu danken.[1] Ich wollte nämlich auch die beigelegte Skizze zur Klasseneinteilung im galoisschen Fall mitschicken, und das nahm Zeit.[2] Ob man die Sache wirklich als Zerlegungsgesetz ansehen darf, hängt wohl davon ab ob die gegebene Charakterisierung zu einem Existenzsatz ausreicht; und davon weiß ich garnichts. Ich will erst einmal Ihre kleine Note zur expliziten Konstruktion im zyklischen Fall verstehen; vielleicht gibt die zusammen mit den Deuringschen Überlegungen über Galoismoduln den Schlüssel – Scholz existiert ja auch![3] Aber das ist so unsicher daß ich wohl erst einmal das Vorhandene ausarbeiten und publizieren werde – ich hoffe aber daß die Skizze es ungefähr verständlich macht.

Die Überlegungen sind heuristisch alle hyperkomplex; es handelt sich um eine Klasseneinteilung nach den Invarianten inbezug auf die Zerlegungskörper einzeln, wozu noch die Zentrumsrelationen kommen (d.h. im abelschen Fall nur direkte Produkte von Idealalgebren betrachtet werden, wie ich Ihnen im vorigen Jahr in Marburg erzählte). Es war aber dann bequemer und vor allem präziser, unabhängige Definitionen zu geben: der Wertebereich entspricht dieser Invariantengruppe. Wesentlich ist, daß die Einsklasse der Frobeniuseinteilung im modifizierten Sinn wieder zugeordnete Gruppe wird; statt des vollen Strahls tritt der Teilstrahl (S. 3). Die Anordnung ist genau wie bei Chevalley. (An Chevalley und Deuring gehen Durchschläge, eventuell schicken Sie Ihr Exemplar an Artin weiter. Mehr hat die Maschine nicht geleistet, einen ganz schlechten Durchschlag habe ich mir zurückbehalten.)[4]

Von den Göttinger Studenten – Witt, Bannow, Tsen – habe ich gehört, daß Sie im nächsten Semester wahrscheinlich schon in Göttingen wären? Stimmt das? Ich würde es mir sehr wünschen, da ich einstweilen vorhabe gegen Anfang Juni für ein paar Wochen nach Göttingen zu kommen; aber ich glaube nicht recht daß es bei Ihnen so schnell geht. Ich wollte Ihnen aber auf alle Fälle wegen meines Lehrauftrags schreiben, worüber ich im Herbst schon mit F. K. Schmidt gesprochen habe. Glauben Sie nicht daß es möglich ist, daß Deuring ihn bekommt? Ein Lehrauftrag ist ja im Grunde das was ihm am meisten liegt, und ich möchte es ihm sehr wünschen, auch das Zusammenarbeiten mit Ihnen wovon beide Teile viel hätten![5] Er schrieb mir gerade daß er etwas über Algebraisierung der „komplexen Multiplikation“ nachgedacht habe – ohne noch ganz eingedrungen zu sein – was aber mit der Frage zusammenhängt, gegeben algebraischer Funktionenkörper mit Koeffizienten aus algebraischem Zahlkörper: welche Divisorenklassen haben endliche Ordnung?[6]

Sind da nicht auch Beziehungen zu Ihrer Riemannschen Vermutung, die sie wie Sie schreiben, jetzt rein algebraisch im elliptischen Fall haben.[7] Und sind Sie da noch weitergekommen?

Die Leute hier sind alle von großem Entgegenkommen und einer natürlichen Herzlichkeit, die einen direkt bekannt sein läßt, auch wenn es nicht sehr tief geht. Eingeladen wird man beliebig viel; ich habe auch allerhand interessante, nicht zum College gehörige Leute kennen gelernt. Im übrigen mache ich hier ein Seminar mit drei „girls" – students werden Sie nur selten genannt – und einem Dozenten, und grad lesen sie mit Begeisterung van der Waerden Bd. I, eine Begeisterung die bis zum Durcharbeiten aller Aufgaben geht – sicher nicht von mir verlangt. Dazwischen schiebe ich etwas Hecke, Anfangskapitel.[8] Für nächstes Jahr gibt es aber, echt amerikanisch, ein Emmy-Noether-Fellowship, das wohl unter eine Schülerin von MacDuffee und eine von Manning-Blichfeldt-Dickson verteilt wird; die erstere scheint etwas Niveau zu haben. Außerdem kommt wahrscheinlich Frl. Taussky mit einem Bryn Mawr Stipendium her[9]; sie hatte sich schon voriges Jahr darum beworben, da wurde es aus Mangel an Mitteln nicht verteilt – früher wurden fünf solcher auswärtigen Stipendien verteilt, die Depression zeigt sich überall! Schließlich hat sich auch eine Schülerin von Ore um ein National Research Fellowship für hier beworben.

Zum Gegengewicht habe ich seit Februar einmal wöchentlich eine Vorlesung in Princeton angefangen – am Institut und nicht an der „Männer"-Universität, die nichts Weibliches zuläßt, während Bryn Mawr mehr männliche Dozenten hat als weibliche, und nur in den students exklusiv ist. Ich habe mit Darstellungsmoduln, Gruppen mit Operatoren angefangen; Princeton wird in diesem Winter zum erstenmal, aber gleich gründlich, algebraisch behandelt. Weyl liest auch Darstellungstheorie, will allerdings zu kontinuierlichen Gruppen übergehen. Albert, in einem „Leave of absence" dort, hat vor Weihnachten etwas hyperkomplex nach Dickson vorgetragen, zusammen mit seinen „Riemann matrices".[10] Vandiver, auch „Leave of absence", liest Zahlentheorie, zum ersten Mal seit Menschengedenken in Princeton.[11] Und von Neumann[12] hat – nach einem Überblick von mir über Klassenkörpertheorie im mathematischen Klub – gleich zwölf Exemplare Chevalley[13] als Lehrbuch beordert (Bryn Mawr soll auch etwas davon bekommen!). Dadurch erfuhr ich auch, daß Ihre Ausarbeitung ins Englische übersetzt wird, jetzt hoffentlich in genügend vielen Exemplaren – darauf hatte ich die Leute schon gleich im Herbst gehetzt[14]. Ich habe wesentlich Research-fellows als Zuhörer, neben Albert und Vandiver, merke aber daß ich vorsichtig sein muß; sie sind doch wesentlich an explizites Rechnen gewöhnt, und einige habe ich schon vertrieben! Universität und Flexner-Institut[15] zusammengenommen, sind mehr als sechzig Professoren und solche die es werden wollen dort; die vielen Research-fellows sind, auch wenn Princeton sich bemüht alles heranzuziehen, doch ein Zeichen der akademischen Arbeitslosigkeit.

Brinkmann, im Swarthmore-College, eine halbe Autostunde von hier, hat für eine Reihe von Gruppen – ich glaube Kongruenzgruppen und solche, die durch volle symmetrische dargestellt werden können – die Artinsche Vermutung bewiesen daß seine L-Funktionen ganz, durch explizite Berechnung der Charaktere. So weitgehend

hat Artin doch wohl nicht gerechnet? Ich habe ihm jedenfalls gesagt, die Sache aufzuschreiben und zu publizieren; denke an Math[ematische] Annalen, wenn es neu und nicht zu kompliziert ist.[16]

Nun herzliche Grüße Ihre Emmy Noether

Anmerkungen zum Dokument vom 6.3.1934

[1]Seit dem letzten Brief aus Göttingen sind 6 Monate vergangen. Diesen Brief schrieb Noether in den USA am Bryn Mawr College.

[2]Diese Skizze haben wir in dem Nachlass von Hasse nicht gefunden. Wahrscheinlich handelte es sich um die Ausarbeitung, die Noether im Brief vom 27.6.1933 in Aussicht gestellt hatte.

[3]Von Hasse war in den Mathematischen Annalen eine Arbeit [Has33c] erschienen: „Explizite Konstruktion zyklischer Klassenkörper.“ Diese Arbeit wurde von Noether bereits in ihren Briefen vom 3. 3. und 23. 3. 1933 erwähnt. – Arnold Scholz hatte in den dreißiger Jahren eine Reihe von Arbeiten zur Klassenkörpertheorie publiziert, meist mit expliziten Konstruktionen und algorithmischer Begründung.

[4]Zu einer Publikation dieser Dinge ist es nicht mehr gekommen.

[5]Es ist für Emmy Noethers selbstloses Denken und Handeln bezeichnend, dass sie sich noch in ihrer Situation, nachdem man ihr den Göttinger Lehrauftrag weggenommen hatte, um die Zukunft ihres begabtesten Schülers Deuring kümmert und sich für ihn einsetzt. Allerdings hat Deuring den Lehrauftrag, der durch die Entlassung Emmy Noethers frei geworden war, *nicht* bekommen. Zwar hat er sich auf Veranlassung Hasses später (1935) in Göttingen habilitieren können, erhielt jedoch nach Einspruch von Tornier *nicht* die venia legendi in Göttingen, die Hasse für ihn beantragt hatte.

[6]Die Deuringsche Arbeit „Algebraische Begründung der komplexen Multiplikation“ erschien erst 1949 in den Hamburger Abhandlungen: [Deu49]. Aus dem Briefwechsel Hasse-Deuring ist zu entnehmen, dass die Grundidee dazu schon 1937 fertig gewesen ist. Es erscheint interessant, dass Deuring schon 1933 begonnen hatte, sich mit dieser Frage zu beschäftigen.

[7]Im Laufe des Jahres 1933 hatte Hasse den ersten Beweis der Riemannschen Vermutung im elliptischen Fall, der sich auf die komplexe Multiplikation und Klassenkörpertheorie stützte, durch einen neuen Beweis ersetzen können, der rein algebraisch nur in Charakteristik p verlief, genauer: in Funktionenkörpern über endlichem Konstantenkörper. Anscheinend hatte Hasse ihr von diesem neuen Beweisansatz berichtet, und Noether spielt hier darauf an. In der Tat ist in der Hasseschen Theorie die Struktur der Gruppe der Divisorenklassen endlicher Ordnung von besonderer Bedeutung. Allerdings hatte sich Hasse zu diesem Zeitpunkt, soweit wir wissen, noch nicht mit algebraischen Funktionenkörpern über Zahlköpern beschäftigt. Das geschah erst später, beginnend in den Jahren 1938/1939, wie wir einem Brief von Hasse an A. Weil vom 7. 3. 1939 entnehmen.

[8]Heckes „Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen“ [Hec23] sind erst 1981 ins Englische übersetzt worden; also hat Noether wohl die deutsche Ausgabe zugrundegelegt, d.h., sie konnte bei ihren Studentinnen Deutschkenntnisse voraussetzen. Dasselbe bei dem Algebra-Buch von van der Waerden [vdW30].

[9]Olga Taussky (die spätere Frau Taussky-Todd) kam tatsächlich mit einem Stipendium nach Bryn Mawr. Über ihre persönlichen Erinnerungen an diese Zeit mit Emmy Noether berichtet sie 1981 in einem Gedenkband [TT81] an Emmy Noether.

[10]Einige Jahre vorher, 1931, hatte Albert einen gewissen Anteil am Beweis des Satzes von Brauer-Hasse-Noether über die Zyklizität von Algebren. Vgl. den ersten Absatz in Noethers Brief vom 22. 11. 1931. – Im Jahre 1937 publizierte Albert ein Lehrbuch „Modern higher algebra“ [Alb37], welches zumindest im Titel den Anspruch erhebt, ein englisches Äquivalent zu van der Waerdens Buch „Moderne Algebra“ [vdW30] zu sein. Es ist anzunehmen, dass Noethers Vorlesung, die Albert in Princeton besuchte, einen erheblichen Einfluss auf die Gestaltung dieses Buches genommen hatte – neben dem Briefwechsel Alberts mit Hasse, der bis zum Jahre 1935 anhielt.

[11]Seit einer Reihe von Jahren tauschte Hasse mit Vandiver (in Austin, Texas) reprints aus, und es gab einige mathematische Korrespondenz zwischen ihnen. Vandiver hatte Hasse mindestens

zweimal in Deutschland besucht, einmal in Halle und einmal in Marburg.

[12]John von Neumann war einer der ersten sechs Professoren des Institute for Advanced Study in Princeton.

[13]Es handelt sich wohl um die Thèse von Chevalley [Che33b], in der die Klassenkörpertheorie *ab ovo* entwickelt wird und gut als „Lehrbuch“ benutzt werden konnte. Diese Arbeit war 1933 im Journal Fac. Sci. Tokyo erschienen und hatte 111 Seiten.

[14]Gemeint ist die Ausarbeitung [Has33d] von Hasses Marburger Vorlesung 1932 über Klassenkörpertheorie. Diese war im Frühjahr 1933 verteilt worden, jedoch nur an solche Interessenten, die vorher ein Exemplar bestellt hatten. Wenn Noether schreibt, dass sie „die Leute schon im Herbst“ auf eine wünschenswerte Übersetzung aufmerksam gemacht hatte, dann war das wohl in England (Oxford), als sich Noether dort aufhielt. Aus der Korrespondenz Hasse-Mordell wissen wir, dass tatsächlich ein Übersetzungsplan bestand. Dieser wurde jedoch später aufgegeben. Vgl. auch Brief vom 5. 4. 1932, sowie Brief vom 25. 11. 1932, sowie die Anmerkungen zu diesen Briefen.

[15]Flexner-Institut = Institute for Advanced Study.

[16]Es handelt sich um Heinrich W. Brinkmann, der von 1933-1969 am Swarthmore College unterrichtete, aber während dieser Zeit anscheinend nichts publizierte. Wir haben jedenfalls keine Arbeit von Brinkmann zu diesem Thema gefunden. (Noether schreibt irrtümlich „Brinckmann“ statt „Brinkmann“.)

---

74 26.04.1934, Noether an Hasse

Bryn Mawr College (bis 18. Mai), 26.4.34

Lieber Herr Hasse,

Ich habe dieser Tage durch F. K. Schmidt gehört daß Sie jetzt den Ruf nach Göttingen wirklich bekommen haben, und möchte Ihnen sagen wie sehr ich mich darüber freue! Jetzt bleibt Göttingen doch Mittelpunkt! [1] Herzlichen Glückwunsch!

Aber eigentlich wünsche ich Ihnen noch mehr Glück zu Ihrer neuesten Mathematik: Hilbertsches Problem der Klassenkörperkonstruktion und Riemannsche Vermutung im Funktionenkörper gleichzeitig, das ist viel! [2]

Soviel ich übersehen kann, hängt Ihr Meromorphismenring[3] eng zusammen mit den zu den Riemannschen Matrizen gehörigen Algebren, die Albert jetzt bestimmt hat (am lesbarsten im letzten Heft der Annals of Mathematics, Jan[uar] 1934 [4]). Damit wären dann die Fragen erledigt, ob der Ring nichtkommutativ sein kann, und ob es transzendente Meromorphismen gibt; letzteres natürlich nur, wenn es sich bei Albert wirklich um den vollen Ring handelt, und nicht etwa nur um den Unterring aller algebraischen Meromorphismen.[5] Ich will Albert morgen einmal danach fragen. Ich habe in dieser Arbeit auch gesehen, daß die Geometer schon lange die Ihrem Körper der Abelschen Funktionen entsprechende p-dimensionale Mannigfaltigkeit[6] hatten; natürlich alles ohne irgend eine Idee von Zahlentheorie.[7] Lefschetz und Albert waren sehr erstaunt, als ich auf einem Vortrag (beim Meeting in New York) sagte, mir schiene es daß darin in Erweiterung der komplexen Multiplikation das Material zur Lösung des Hilbertschen Problems durch Abelsche Funktionen liege. Tags darauf kam Ihr Brief daß Sie das wirklich gemacht haben! [8] Allerdings mit viel tiefergreifenden Methoden!

Wann gehen Sie nach Helsingfors – und an die finnischen Seen? [9] Und wie wird es dann mit Göttingen im Sommer? Jedenfalls rechne ich damit daß Sie irgendwann da sind, wenn auch nicht die ganze Zeit! Ich will schon in den ersten Junitagen kommen, über Hamburg wo ich wohl zwei Tage bleiben werde. Es gibt hier ja kaum Osterferien; dafür schließt das Institut in Princeton schon am 1. Mai, hier die Vorlesungen Mitte Mai. Dann gibt es hier noch Examen, wo ich nicht beteiligt bin, und einen feierlichen Aufzug zum Schluß, mit dreifach abgestuften Talaren, B.A., M.A. oder Ph.D.

Was übrigens die neulich geschickte Klasseneinteilung[10] angeht, so habe ich mir unterdes immer mehr klar gemacht, daß es sich genau so um eine Übertragung alles „abelschen" handelt, wie Artin einmal alles „zyklische" übertragen hat. Damit kann man nicht an den Existenzsatz heran, schon deshalb nicht weil die Einteilung im Kleinen – d.h. für auflösbare Körper an den Verzweigungsstellen – vollständig versagt. Mir scheint daß man erst hier einmal Klarheit haben muß, d.h. nicht nur die Verhältnisse sukzessiv zyklisch mit Kompositionsreihen überblicken darf, sondern in Beziehung zu den irreduziblen Darstellungen, also zu den Galoismoduln[11], und damit auch zu den Artinschen Führern. Aber im Augenblick bin ich nicht weitergekommen.

Für Deuring freue ich mich besonders über Ihr Kommen. Ich hoffe daß es in Göttingen mit der Habilitation rasch gehen wird; das hat er ja dummerweise vor Amerika versäumt, und in Leipzig scheint es sich mit den neuen Bestimmungen hinauszuziehen.[12] Er hat seine Resultate vom letzten Sommer zur Riemannschen Vermutung bei Systemen quadratisch imaginärer Körper als Hab[ilitations]-Schrift ausgearbeitet.

Nun herzliche Grüße Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 26.4.1934

[1]Zwar hatte Hasse im April 1934 einen Ruf nach Göttingen erhalten, und er war geneigt, diesen Ruf anzunehmen, da er sich verpflichtet fühlte, die durch die Machtergreifung der NSDAP verursachten schmerzlichen Verluste im Lehrkörper wieder zu ersetzen und die Bedeutung Göttingens als internationales mathematisches Zentrum soweit wie möglich wiederherzustellen. Infolge der turbulenten Ereignisse aus Anlass seiner Berufung dauerte es jedoch bis Anfang Juli 1934, bis Hasse seine Tätigkeit in Göttingen tatsächlich aufnehmen konnte. Und der Wunsch Noethers, dass „Göttingen Mittelpunkt bleibe" konnte angesichts der politischen Entwicklung im Deutschland der folgenden Jahre trotz der Bemühungen Hasses nicht verwirklicht werden. Bereits ein Jahr später, am 18. 4. 1935, schrieb Hasse an Toeplitz: „*Was mich vielmehr bedrückt, ist die Tatsache, dass ich einerseits der mathematischen Welt gegenüber die Verantwortung für den Wiederaufbau Göttingens zu einem mathematischen Platz von Rang trage, mir aber andrerseits durch die bestehenden hochschulpolitischen Regelungen fast jeder entscheidende Einfluss auf die personelle Gestaltung hier genommen ist. Dies betrifft nicht nur die Besetzung der Ordinariate, sondern gilt in gleicher Weise für die Lehraufträge, Assistenten- und Hilfsassistentenstellen.*" Was insbesondere die Lehraufträge betrifft, so war es Hasse nicht gelungen, einen Lehrauftrag für Deuring durchzusetzen, so wie es Noether gewünscht hatte. (Vgl. Noethers vorangegangenen Brief vom 6. 3. 1934.

[2]Wir wissen nicht, was F. K. Schmidt (oder Hasse selbst) an Emmy Noether geschrieben hatte. Nach ihren Bemerkungen in diesem Brief war es wohl ein Programm zur Algebraisierung der Theorie der abelschen Funktionenkörper (Charakteristik p eingeschlossen), im Hinblick auf einen

Beweis der Riemannschen Vermutung für Funktionenkörper beliebigen Geschlechts. Schon in seiner ersten Publikation über die Riemannsche Vermutung in elliptischen Funktionenkörpern (in den Göttinger Nachrichten: [Has33a]) hatte Hasse ein solches Programm angedeutet. Dieses Programm war aber noch keineswegs durchgeführt. Man bemerke, dass Noether nicht etwa Hasse zu seinen Ergebnissen gratuliert, sondern sie „wünscht ihm Glück für seine Mathematik", d.h. Erfolg bei der Weiterarbeit an dem aufgestellten Programm. (Später stellte sich dann heraus, dass bei der Durchführung im Detail noch erhebliche Schwierigkeiten auftraten. Wie wir heute wissen, hat Hasse sein Ziel eines allgemeinen Beweises für die Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern nicht mehr erreicht, sondern André Weil ist ihm darin zuvorgekommen.)

Das von Emmy Noether ebenfalls erwähnte „Hilbertsche Problem der Klassenkörperkonstruktion" (das 12. Hilbertsche Problem) hat Hasse wohl niemals ernsthaft bearbeitet. Jedoch bestand damals allgemein die Erwartung, dass im Zuge der Algebraisierung der Theorie der abelschen Funktionenkörper (die Hasse anstrebte) auch Licht auf das 12. Problem von Hilbert fallen würde. Vielleicht hatte Hasse ihr von diesem Zusammenhang berichtet. (Heute wissen wir, dass dies nicht für beliebige Zahlkörper, sondern nur für die sog. CM-Körper zutrifft, also solche, die bei der komplexen Multiplikation im Sinne der Theorie der abelschen Mannigfaltigkeiten auftreten.)

[3]In der heutigen Terminologie handelt es sich um den Endomorphismenring einer abelschen Mannigfaltigkeit.

[4][Alb34].

[5]Dass schon für elliptische Kurven nichtkommutative Meromorphismenringe in Charakteristik p auftreten können, hatte Hasse zu diesem Zeitpunkt schon selbst entdeckt. Wahrscheinlich meint Noether die Frage, ob auch bei Charakteristik 0 und insbesondere über Zahlkörpern Nichtkommutativität auftreten kann, wenn es sich um abelsche Mannigfaltigkeiten höherer Dimension handelt.

[6]An dieser Stelle schiebt Emmy Noether eine Fußnote ein, die folgendermaßen lautet: „*Diese brieflichen Ausführungen haben mir bei der Lektüre der Korrektur sehr geholfen!*" Auch dies scheint uns darauf hinzuweisen, dass Hasse eine Skizze der algebraischen Theorie der abelschen Funktionenkörper gegeben hatte, so wie er sich den Aufbau vorstellte. – Es ist aber nicht klar, was Noether meint, wenn sie von „Korrektur" spricht. Meint sie vielleicht die Korrekturfahnen der oben erwähnten Arbeit von Albert [Alb34], die dieser ihr zur Information gegeben hatte? Oder handelt es sich um die Korrekturen der Arbeit von Hasse in den Hamburger Abhandlungen über die Riemannsche Vermutung im elliptischen Fall [Has34a] ?

[7]Hier bedeutet p nicht die Charakteristik, sondern das Geschlecht des Funktionenkörpers (oder der Kurve).

[8]Hierzu siehe die vorangegangenen Fußnoten. Hier ist wohl „gemacht" im Sinne von „konzipiert" zu verstehen.

[9]Diese Anspielung auf Finnland scheint die Antwort auf eine Mitteilung Hasses zu sein, dass er den finnischen Mathematiker Nevanlinna und dessen Schüler Ahlfors zu Vorträgen in Marburg erwarte. Tatsächlich fanden diese Vorträge im Mai 1934 statt. (In einem Brief an Davenport am 27. 5. 1934 äußerte sich Hasse sehr beeindruckt von den Vorträgen.) Wir wissen nicht, wann sich der Kontakt Hasses zu der finnischen funktionentheoretischen Schule ergeben hat. Nevanlinna hatte Göttingen in den zwanziger Jahren mehrfach besucht und dort auch Emmy Noether getroffen; vielleicht hatte Hasse ihn bei einer dieser Gelegenheiten kennen gelernt. Vielleicht auch hatte sich der Kontakt durch Egon Ullrich hergestellt, der sich bei Hasse in Marburg habilitiert hatte. Ullrich hatte 1927 in Helsinki studiert und dabei Nevanlinna getroffen, mit dem ihm eine lebenslange Freundschaft verband. Die Korrespondenz von Hasse mit Nevanlinna, die erhalten geblieben ist, beginnt 1932.

Hasse legte nach seiner Übersiedlung nach Göttingen im Juli 1934 Wert darauf, dass dort auch die Funktionentheorie wieder vertreten wird, und daher nahm er Ullrich als Oberassistenten nach Göttingen mit. 1936 gelang es Hasse, Nevanlinna für ein Jahr als Gastprofessor nach Göttingen zu holen. Eine Reise nach Finnland („an die finnischen Seen"), die eigentlich für den September 1934 geplant war, konnte Hasse jedoch wegen der ungeklärten Verhältnisse am Göttinger Institut nicht antreten; er machte diese Reise erst im Oktober 1938. Vgl. den Brief vom 7. 4. 1935.

[10]Vgl. die Anmerkungen zum vorangegangenen Brief vom 6.3.1934.

[11]Wenn Noether hier davon spricht, dass man für die nicht-abelsche Klassenkörpertheorie die irreduziblen Darstellungen benötigt (gemeint sind Darstellungen der Galoisgruppe), so wird man

an das viel später konzipierte Langlands-Programm erinnert.
[12]Zur Habilitation Deurings vgl. die Anmerkungen zum vorangegangenen Brief vom 6.3.1934.

---

75 21.06.1934, Noether an Hasse

Göttingen, 21. 6. 34

Lieber Herr Hasse,

Ich bin seit 14 Tagen wieder hier, war natürlich sehr traurig Sie nicht anzutreffen; nach den letzten Hamburger Nachrichten hatte ich halb damit gerechnet![1] Aber augenblicklich scheint ja alles wieder sehr günstig auszusehen![2]

Leid tut mir daß ich Sie wohl jetzt nicht zu mir einladen kann[3]; und zum Herbst gebe ich die Wohnung auf und nehme Bücher und die guten von meinen Sachen mit hinüber.[4] Man hat mir drüben versichert daß ich mit Verlängerung rechnen kann; ob in Bryn Mawr oder anderswo, wissen sie wohl selbst noch nicht. Die „appointments“ werden in Amerika überhaupt immer nur für zwei Jahre gegeben, auch im regulären Fall, wo es natürlich Gewohnheitsrechte gibt.

Kommen Sie nicht einmal zu Ihren Eltern nach Bad Soden zu Besuch? Denn in Marburg will ich Sie wohl besser auch nicht besuchen?

Ich soll von Artins sehr grüßen, bei denen ich ein paar Tage wohnte; in der neuen Wohnung in Langenhorn (Hainfelderstr. 9), die wirklich Sommerfrische ist. Daß dieser Tage ein zweites Kind erwartet wird, werden Sie wissen. Artin läßt sein Nichtschreiben zur Göttinger Berufung mit seinem allgemeinen Nichtschreiben entschuldigen.

In Hamburg habe ich als „Noether–Amerika“ ausführlich im Artin-Seminar vorgetragen, über die Klasseneinteilung bei galoisschen Körpern. Artin, der früher einmal ähnliches überlegt hatte, ohne ganz durchzukommen, steht der Sache inbezug auf Existenzsatz genauso skeptisch gegenüber wie ich. Chevalley, der für eine Woche da war, hatte einen hyperkomplexen Vorschlag, der allerdings schon für Primzahl-Potenzen nicht mit den Artinschen L-Reihen stimmt. Man bilde die Ideale in K ringhomomorph auf das ganzzahlige Zentrum des Gruppenrings ab, indem man die Frobenius-Substitution $\mathfrak{p} \longrightarrow \langle \mathcal{S} \rangle$ erst zu einem multiplikativen Homomorphismus ergänzt vermöge $\mathfrak{p}_1^{\rho_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{\rho_r} \longrightarrow \langle \mathcal{S}_1 \rangle^{\rho_1} \cdots \langle \mathcal{S}_r \rangle^{\rho_r}$, Multiplikation im Gruppenring verstanden; und dann die lineare Ausdrückbarkeit der $\langle \mathcal{S} \rangle$-Potenzen durch die Klassen $\langle \mathcal{S} \rangle$ selbst auf die Ideale überträgt, also dadurch Addition der Ideale einführt. Einsklasse der Ideale wären dann alle diejenigen, die $\langle \mathcal{E} \rangle$ im Gruppenring entsprechen.

Tatsächlich ordnet Artin aber den $\mathfrak{p}$-Potenzen bei den L-Reihen nicht die Potenzen $\langle \mathcal{S} \rangle^\rho$ zu, sondern die Klasse von $\mathcal{S}^\rho$: $\langle \mathcal{S}^\rho \rangle$ – was mit meiner Einteilung stimmt – sodaß ich dieses Abspalten der Zerlegungsgruppe, auf das Chevalley hinauskommt, auch nicht recht glaube.[5]

Witt glaubt, mit Ihrer Riemannschen Vermutung bei beliebigen Funktionenkörpern nun auch für diese die Funktionalgleichung der L-Reihen und etwas mehr beweisen zu können; er hatte schon solche hypothetischen Ansätze.[6] Daß Witt ein Gegenbeispiel zum Satz über die zerfallenden Algebren hat – Grundkörper $\mathsf{P}(x)$ mit P rationale Zahlen – werden Sie wissen.[7]

Tornier hat mir übrigens als „auswärtiger Gelehrten" Institutsbibliothek usw. zur Verfügung gestellt.[8]

Nun herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 21.6.1934

[1]Wenn Noether von den „'Hamburger Nachrichten" spricht, dann bezieht sie sich auf die Informationen, die sie vor 14 Tagen bei ihrem Aufenthalt in Hamburg erfahren hatte, vielleicht von den Artins, bei denen sie wohnte, wie sie weiter unten im Brief berichtet. Offenbar hatte es sich bis Hamburg herumgesprochen, dass Hasse bei seinem ersten Versuch, seine neue Stelle in Göttingen anzutreten, von extrem nationalsozialistischen Kräften daran gehindert wurde. Die Sache hatte sich am 29. Mai 1933 ereignet, und Hasse war daraufhin nach Marburg zurückgekehrt, um die Entscheidung des Ministeriums abzuwarten. Erst am 2. Juli konnte Hasse seine Stelle als Institutsdirektor in Göttingen antreten. (Die vorstehend genannten Daten sind dem Buch von S. L. Segal [Seg03] entnommen.)

[2]Noether meint mit „günstig", dass Hasse wohl doch noch die Professur in Göttingen antreten könne.

[3]Wenn Noether davon spricht, dass sie Hasse wohl jetzt nicht einladen kann, dann spiegelt das die Atmosphäre in Göttingen wider. Hasse war in der Vergangenheit mehrmals der Vorwurf gemacht worden, dass er „Kontakte mit Juden" aufrechterhalte, und das machte ihn in den Augen seiner Gegner ungeeignet zur Übernahme des Göttinger Lehrstuhls. Offenbar wusste Noether davon, und sie wollte vermeiden, dass Hasse (und sie vielleicht auch?) zusätzliche Probleme mit den extremen Göttinger Nationalsozialisten bekommt. Aus demselben Grund schreibt sie weiter unten im Brief, dass sie Hasse in Marburg wohl auch nicht besuchen sollte. Stattdessen schlägt sie ein Treffen bei den Eltern von Hasse in Bad Soden vor. Aus dem Briefwechsel geht nicht hervor, ob sich Hasse tatsächlich mit Noether in Bad Soden getroffen hat. Sicherlich trafen sie sich im Juli in Göttingen, nachdem Hasse seine Stelle angetreten hatte.

[4]Offenbar hatte Noether inzwischen die Hoffnung aufgegeben, doch wieder nach ihrem geliebten Göttingen zurückkehren zu können.

[5]Es gibt einen Brief von Artin an Hasse vom 19. 8. 1927 zu diesem Thema, das aber in der weiteren Artin-Hasse Korrespondenz dann nicht mehr angesprochen wird.

[6]Witt hat später, im Jahre 1936, einen Beweis der Funktionalgleichung der L-Reihen für beliebige Funktionenkörper über endlichen Körpern erhalten. Und zwar *ohne* Benutzung der Riemannschen Vermutung, jedoch mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Riemann-Rochschen Satzes. Der Wittsche Beweis wurde jedoch nicht publiziert. Vgl. dazu die gesammelten Werke von Witt [Wit98], sowie [Roq01].

[7]Die Wittsche Arbeit dazu erschien in der Mathematischen Zeitschrift [Wit34b].

[8]Wenn Noether berichtet, dass sie von Tornier als „auswärtige Gelehrte" behandelt wurde, dann spricht daraus Enttäuschung und Traurigkeit, denn sie fühlte sich immer noch als Göttingerin. – E. Tornier war inzwischen als Ordinarius und Mitdirektor des Göttinger Mathematischen Instituts eingesetzt worden, und zwar über den Kopf von Hasse hinweg, der andere Pläne für die Besetzung dieses Lehrstuhls hatte. Tornier war früher, während der Zeit von Hasse in Halle, durch Hasse gefördert worden, er hatte sich in Halle (bei Hasse) habilitiert und erhielt dann (auf Empfehlung von Hasse) in Kiel eine Stelle als Privatdozent. Nach der Machtübernahme der NSDAP im Januar 1933 stellte sich Tornier als eifriger Nazi dar, weshalb ihm wohl auch der Göttinger Lehrstuhl übertragen worden war. Er hat im Laufe der folgenden Jahre immer wieder gegen Hasse agiert. Im Jahre 1936 wurde er aus Göttingen nach Berlin abberufen, nachdem Hasse gedroht hatte, sich wegen der Diffamierungen durch Tornier aus Göttingen zurückzuziehen. – Die Einstellung von

Tornier zu Emmy Noether wird durch die folgende Begebenheit beleuchtet: Nach dem Tod von Emmy Noether hatte Hasse durch Hermann Weyl veranlasst, dass an ihrem Grab ein Kranz als letzter Gruß ihrer Göttinger Kollegen niedergelegt wurde. Es gibt nun einen Brief von Tornier an Hasse vom 27. 6. 1935, in den er zwar den auf ihn entfallenden finanziellen Beitrag zu dieser Kranzspende eingelegt hatte, jedoch ausdrücklich hervorhob, dass er sich dieser Spende nicht angeschlossen hätte, wenn er vorher davon gewusst hätte.

---

76 15.07.1934, Noether an Hasse

Göttingen, 15. 7. 34

Lieber Herr Hasse!

Deuring hat mir Durchschlag seiner Habilitationsschrift zur Ansicht geschickt; ich wollte Sie fragen ob ich den Durchschlag bei Gebhardt's Hotel für Sie abgeben soll, oder ob Sie vielleicht an einem der nächsten Abende zu mir kommen? [1]

Es liegt Deuring daran sich habilitieren zu können sobald über seine Stelle endgültig entschieden ist, und zwar aus folgendem Grund: In Sachsen[2] ist seit Ende des Wintersemesters die Bestimmung, daß vor Habilitation das Staatsexamen abgelegt sein muß. Darauf bereitet er sich jetzt vor (Pädagogik und Philosophie), kann sich aber erst im nächsten Semester melden da ihm die nötigen sächsischen Studiensemester fehlen: Vor 1935 ist es also nichts mit der Habilitation! Dieser Termin ist ganz neuerdings noch um ein volles Jahr verlängert; er muß erst ein Referendarjahr an einer Schule absitzen, ehe er zur Habilitation zugelassen wird. Vor 1936 ist also nichts zu wollen.

Nun soll hier auch bald das Staatsexamen verlangt werden (wie Tornier mir neulich sagte), ob auch das Referendarjahr, weiß ich nicht. Es liegt Deuring daran, wenn möglich noch vor Erlaß dieser Bestimmung einzureichen; wenn nötig kann man ja nachträglich noch Korrekturen machen.

Er ist Pflichtmitglied der jetzt auch in Leipzig gegründeten Dozentenschaft, hat sich dort zum Lagerdienst gemeldet, außerdem hat er in den Osterferien schon 3 Wochen Lagerdienst, Wehrsport, im Erzgebirge gemacht. Diese Vorbedingungen sind also erfüllt; meines Wissens kann der Lagerdienst und die Dozentenakademie auch nach dem wissenschaftlichen Teil gemacht werden.[3]

Die Habilitationsschrift ist die in mit wachsendem D wachsenden Streifen gültige Riemannsche Vermutung, bei quadratisch imaginären Körpern.[4]

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.

Telefonisch bin ich immer gegen $\frac{1}{2}$ 4 Uhr nachmittags unter 3060, Mittagstisch Schwieger, erreichbar.

Anmerkungen zum Dokument vom 15.7.1934

[1]Hasse hatte am 2.7.1934 seine Stellung in Göttingen angetreten. Offenbar wohnte er wochentags in Gebhardt's Hotel (das in der Nähe des Bahnhofs liegt) und fuhr am Wochenende nach Marburg zu seiner Familie. Das Datum dieses Briefes, also der 15. 7. 1934, fiel auf einen Sonntag, sodass Hasse wohl nicht in Göttingen war und Noether daher einen Brief schreiben musste.

[2]Deuring hatte eine Assistentenstelle bei van der Waerden in Leipzig inne, also in Sachsen. Aus den von Noether genannten Gründen schien es ihm jedoch geraten, sich nicht in Leipzig sodern in Göttingen zu habilitieren.

[3]Diese Angaben beleuchten die Methoden des Nazi-Regimes, die angehenden Privatdozenten vor Zulassung zur Habilitation auf ihre politische Einstellung zu prüfen.

[4]Die Deuringsche Habilitationsschrift handelt von Zetafunktionen definiter quadratischer Formen Q; es bezeichne $-D$ die Diskriminante von Q. Es gibt, wie Deuring zeigt, eine Konstante c sodass alle Nullstellen von $\zeta_Q(s)$ mit Imaginärteil $0 < t < D^c$ den Realteil $\frac{1}{2}$ besitzen. Dies meint Noether, wenn sie von der „mit wachsendem D wachsenden Streifen gültige Riemannsche Vermutung" spricht. Die Deuringsche Arbeit wurde von Hasse in das Crellesche Journal aufgenommen und erschien 1935 [Deu35c].

---

77 31.10.1934, Noether an Hasse

Bryn Mawr College, 31. 10. 34

Lieber Herr Hasse,

Ich habe mir von Lefschetz Literatur geben lassen, was von seinen letzten Arbeiten für Ihre Fragen in betracht kommt:[1]

1. Report of the Committee on Rational Transformations, published by the National Research Council, Ch. 17
2. S. Lefschetz, L'analyse Situs, letztes Kapitel (Sammlung Borel)
3. S. Lefschetz, Transactions Am. Math. Soc. vol 22, 1921, Part 2 (Mémoire Bordin)

Vielleicht geben Sie die Literatur noch Schilling[2] an, der sich nach algebraischer Geometrie (mehr Veränderliche) bei mir erkundigte; es gibt außer Lefschetz nur noch Zariski in dieser Richtung in U.S.A.

Es sind dieses Jahr eine Reihe interessierter Leute in Princeton; ich mache ein Seminar über Klassenkörpertheorie, was allerdings wesentlich Vorlesung ist, aber doch mit gelegentlichem Mitarbeiten der Leute. Wir stecken allerdings einstweilen noch in galoisscher Theorie; aber nächstes mal soll Frl. Taussky, die zwischendurch mitkommt, einfachste zahlentheoretische Beispiele bringen. Sie hat hier Hauptprobe gehalten; ich mache hier dasselbe, weiblich zugeschnitten, d.h. durch einen mir

unheimlichen Fleiß ersetzen die girls, was an Selbständigkeit fehlt – es sind ja dieses Jahr außer Frl. Taussky noch zwei andere mit Stipendium dabei.[3]

Ich habe mir überlegt, daß der kürzeste Weg, der auch am wenigsten voraussetzt, eine Kombination von Chevalley mit etwas transzendenten Methoden ist: Man macht die Klasseneinteilung nach dem (zusammengesetzten) Frobenius-Artin-Symbol; um zu zeigen, daß damit die ganze Gruppe erschöpft ist, genügt für den abelschen Fall der Nachweis, daß für zyklische Körper von Primzahlgrad nicht zerfallende Primideale existieren. Das werde ich zuerst transzendent mit der Dichtigkeit der voll zerfallenden machen (und spare so die ganze Abzählung $h \geq n$, die ich vielleicht hinterher bringe). Dann geht es nach Chevalley weiter: Nachweis, daß zugeordnete Gruppe gleich Artingruppe, für Kreiskörper, und Zurückführung des allgemeinen Falls darauf. Das gibt zugleich eine Vorbereitung für die hyperkomplexe Formulierung: es läßt sich ja jeder Schritt übersetzen.[4]

Noch eine etwas prinzipiellere Sache habe ich mir anläßlich eines Vortrags beim New Yorker Meeting überlegt (wo ich 200 Menschen aus den in New York und um New York herumliegenden Colleges über moderne Methoden erzählt habe): Man kann vom Artin-Iyanaga-Beweis des Hauptidealsatzes den ganzen §3 streichen, mit Ausnahme von 3 Zeilen auf der letzten Seite.[5] Denn dort wird gezeigt: Aus Faktorensystem eins folgt, daß $\overline{G}'$ gleich $\overline{U}^{\{\ldots S-1\ldots\}}$, wo S durch alle Elemente von Γ läuft (denn die S und die $\overline{U}$ sind unter sich vertauschbar, also gibt es mod Kommutator $S^{-1}\overline{U}S\overline{U}^{-1}$). Das heißt aber: $(\overline{G}')^{\Gamma} = \overline{U}^{\{\ldots S-1\ldots\}\Gamma} = E$, w.z.b.w.[6]

Das zeigt noch deutlicher, daß allein der Zerfällungskörper alles macht: ich vergleiche die Beweismethode jetzt einfach z.B. mit dem Beweis des Nichtverschwindens der Diskriminante bei Algebren ohne Radikal. Vermöge des Zerfällungskörpers Λ geht man zum vollen Matrizenring über Λ (bzw. der direkten Summe), und liest aus der Normalbasis der Matrizeneinheiten alles ab. Hier liest man es aus Normalform von Faktorensystemen und $\overline{G'}$ ab. Ich werde es auch Artin schreiben; eventuell kann er diese drei Zeilen abdrucken.

Wie war es in Helsinki? Ich habe von manchem anderen, aber nicht darüber gehört. Ich habe hier natürlich viel von Ihnen erzählt; es ist viel Interesse, auch für Pyrmont.[7] Besonders ist natürlich Weyl interessiert; aber auch Courant der sich in N.Y. sehr wohl fühlt – er wohnt mit dem Auto 40 Minuten entfernt, ländlich und nicht weit vom Strand – fängt an menschlich zu werden. Heute wird Rademacher[8] in Philadelphia erwartet; nach vorübergehenden Geldschwierigkeiten hat sich die Sache jetzt doch ermöglichen lassen.

Daß Ore im Januar zu Ihnen kommen will, freut mich sehr; ich hoffe er zieht andere nach![9]

Nun herzliche Grüße Ihre Emmy Noether

Anmerkungen zum Dokument vom 31.10.1934

[1] Offenbar hatte Hasse um Literaturangaben über die Grundlagen der klassischen algebraischen Geometrie gebeten, im Hinblick auf sein Projekt des Beweises der Riemannschen Vermutung für

Funktionenkörper beliebigen Geschlechts.

[2]Zu Schilling vgl. auch den Brief von Hasse an Noether vom 19. 11. 1934.

[3]Vgl. die Erinnerungen [TT81] von Olga Taussky-Todd an Emmy Noether.

[4]In ihrer Postkarte vom 23. 11. 1934 gibt Noether zu, dass der hier skizzierte Aufbau der Klassenkörpertheorie sich wohl nicht in dieser Form durchführen lässt.

[5]Es handelt sich um den Hauptidealsatz der Klassenkörpertheorie. Der erste Beweis von Furtwängler [Fur29] wurde in der Folge mehrfach vereinfacht, zunächst [Mag34], dann [Iya34]. Noether bezieht sich auf die letztgenannte Arbeit. Wenn sie dabei von dem Artin-Iyanaga-Beweis spricht, so erscheint das gerechtfertigt, denn in der Einleitung zu seiner Arbeit betont Iyanaga, dass „der größere Teil der Arbeit von Artin stammt“.

[6]Eintrag von Hasses Hand: „*N.B.* $\overline{G}'^{\Gamma} = E$ *genügt doch nicht!!! Es ist* $\overline{U}^{\Gamma} = E$ *zu zeigen. Aber von* $\overline{G}'$ *steht nur* $\overline{G}' \geq U$, *nicht* $\overline{G}' = \overline{U}$ *fest!*“ Vgl. dazu auch den Brief von Hasse an Noether vom 19. 11. 1934, sowie die beiden Postkarten Noethers vom 23. und 28. 11. 1934.

[7]In Bad Pyrmont hatte im September die Jahrestagung der DMV stattgefunden. Das Besondere an dieser Tagung waren die politischen Themen. Erstens ging es um die sog. *Gleichschaltung* der DMV im Sinne der nationalsozialistischen Politik; diese konnte damals bis zu einem gewissen Grad abgewehrt werden. Zweitens ging es um die Stellungnahme der DMV zu der Kontroverse Bieberbach–Harald Bohr. Nachdem Bieberbach seinen berüchtigten Artikel mit Angriffen auf Harald Bohr in dem Jahresbericht der DMV publiziert hatte (gegen den Willen der anderen Herausgeber, Hasse und Knopp), war dies ein Thema für die DMV geworden. Über den Verlauf und die Ergebnisse der Mitgliederversammlung in Pyrmont hatte Hasse einen Bericht verfasst, den er u. a. auch an Hermann Weyl geschickt hatte; darauf scheint sich Emmy Noether in diesem Brief zu beziehen. – Übrigens antwortete Weyl am 1. 12. 1934 auf Hasses Bericht, indem er u. a. schrieb: „*Ich war Ihnen sehr dankbar dafür, dass Sie mich so auf dem Laufenden hielten. Mit dem sachlichen Erfolg kann man wohl nach Lage der Umstände zufrieden sein, obwohl der Wortlaut der Resolution in Sachen Bieberbach–Bohr unseren Ohren hier natürlich nicht sehr angenehm klingt; es wird das Beste sein, wenn er nicht publik wird ...*“ Die Ereignisse auf der Bad Pyrmonter Tagung sind oft dargestellt worden; Segal sagt in seinem Buch „Mathematicians under the Nazis“ [Seg03] über die Tagung: „*This is perhaps the most frequently discussed occurence among mathematicians under the Nazi hegemony*“.

[8]Hans Rademacher war Professor an der Universität Breslau gewesen. Im Februar 1934 wurde er, obwohl nicht jüdischer Abkunft, von der Nazi-Regierung entlassen. Hasse hatte sich für Rademacher bei Harold Davenport eingesetzt, und dieser hatte Rademacher für eine Stelle an der soeben neu gegründeten Schule von Kurt Hahn (der vor den Nazis hatte fliehen müssen) in Gordonstown (Schottland) empfohlen. Aus der Korrespondenz Hasse-Rademacher erfahren wir jedoch, dass R. dann lieber eine andere Möglichkeit vorgezogen hat, nämlich in Philadelphia. Am 2. 6. 1934 schreibt er an Hasse:

> *Nun erfahre ich soeben von Fräulein Noether, dass Phil*[*adelphia*] *für mich vollständig sicher sei, sobald man dort bestimmt wisse, dass mein beim Ministerium erhobener Einspruch endgültig abgelehnt sei. Das ist aber inzwischen geschehen ...*

Wir entnehmen daraus, dass sich Emmy Noether in Philadelphia für Rademacher eingesetzt hat. Anscheinend wusste sie auch von dem Kontakt Hasse-Rademacher; dies würde erklären, dass sie Rademacher hier besonders erwähnt. Ob Hasse selbst einen Empfehlungsbrief für Rademacher nach Philadelphia geschickt hatte, wissen wir nicht; jedenfalls war er von Rademacher bei seiner Bewerbung als Referenz angegeben worden.

[9]Øystein Ore an der Yale University stand sowohl mit Emmy Noether als auch mit Hasse in enger mathematischer Verbindung, z.Bsp. hatte Hasse ihn 1931 eingeladen, zu dem Hensel-Festband des Crelleschen Journals einen Beitrag zu liefern. In dem Briefwechsel Hasse-Ore haben wir einen Brief von Ore vom 26. September 1934 gefunden, in dem Ore seinen Plan mitteilt, dass er im kommenden Frühjahr nach Europa kommen will und u. a. auch nach Göttingen. Offenbar war es diese Ankündigung, über die Hasse an Emmy Noether geschrieben hatte. In der Tat hielt sich Ore zwar nicht im Januar, aber im Frühjahr 1935 für einige Wochen in Göttingen bei Hasse auf. Am 3. August 1935 schrieb er an Hasse:

> *Ich hätte schon längst an Sie und Ihre Frau schreiben sollen, um für die schönen Wochen in Göttingen zu danken...*

78 19.11.1934, Hasse an Noether

Göttingen, den 19. November 1934.

Liebes Fräulein Noether!

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief vom 31. Oktober. Die genannte Literatur von Lefschetz werde ich mir gern ansehen, wenn ich etwas mehr Ruhe habe, und vor allen Dingen auch Schilling darauf hinweisen. Schilling habe ich gesagt, dass er Ihnen seine Dissertation zur Prüfung für die Aufnahme in den Mathematischen Annalen zusenden möchte.[1] Ich habe die Arbeit mit Schilling zusammen in mehreren mehrstündigen Sitzungen sehr genau durchkorrigiert und aus einem chaotischen in einen der Vollendung jedenfalls angenäherten Zustand bringen helfen. In Crelle kann ich sie ja grundsätzlich nicht aufnehmen, der Verleger ist in diesem Punkt sehr genau. Die gleichzeitig mit Schilling gemachte Dissertation von H. Schmid hat Knopp für die Mathematische Zeitschrift angenommen.[2]

Witt und ich sind der Ansicht, dass, wenn man schon einmal Analysis zur Begründung der Klassenkörpertheorie braucht – und bisher hat das niemand ohne Analysis gekonnt – man dann die Kanone auch gleich auf das Hauptquartier richten soll, und das ist in diesem Fall zweifellos nicht der Satz von der arithmetischen Progression oder die Ungleichung $h \leq n$ sondern der Normensatz, das Summen-Theorem für die Invarianten und der Satz von den überall zerfallenden Algebren. Konsequenz: man verwende die Heysche Kanone in der Wittschen Montierung, und dann Rückschuss auf die klassische Klassenkörpertheorie wie zu Ihrem 50. Geburtstag.[3]

Nun muss ich leider der Meisterin einen Fehler nachweisen. Mit $(\overline{G}')^\Gamma = 1$ ist nur Triviales bewiesen, denn die wirkliche Behauptung lautet so: $\overline{U}^\Gamma = 1$. Davon folgt aus Ihrem Resultat nur der triviale Teil $U^\Gamma = 1$ wegen $\overline{G}' \geq U$. Es steht aber nicht, wie Sie zu meinen glauben, $\overline{G}' = U$ fest. Der § 3 von Iyanaga scheint mir keinesfalls entbehrlich zu sein. Er allein ist es ja, der sich mit der Endlichkeitsbedingung wirklich auseinandersetzt. Ihr „Beweis" würde doch auch für unendliche Gruppen U gelten, und da ist der Satz von Witt durch ein Gegenbeispiel als unrichtig erkannt.[4]

In Helsingfors war ich nicht. Ich konnte mich wegen der ganzen Lage hier nicht dazu entschließen, längere Zeit von hier fortzufahren. Wenn es im nächsten Frühjahr Devisen gibt, will ich es dann nachholen. Augenblicklich haben wir in der D.M.V. erneut gegen Bieberbach zu kämpfen.[5] Sie werden demnächst von Blaschke ein Rundschreiben bekommen.[6]

Herzliche Grüsse an alle Bekannten und guten Erfolg für die Ausbreitung der Klassenkörpertheorie und modernen Algebra unter den Yankees und ihren Töchtern.

Stets Ihr H. Hasse

Anmerkungen zum Dokument vom 19.11.1934

[1]O. F. G. Schilling war ein Schüler von Noether in Göttingen gewesen. Nach der Entlassung Noethers hatte ihn Hasse als Doktorand übernommen. Seine Dissertation erschien in den Mathematischen Annalen [Sch35a]. Darin behandelt er die ihm von Noether gestellte Aufgabe, die Arithmetik eines Zahlkörpers K zu vergleichen mit der Arithmetik in einer einfachen Algebra, welche K als maximalen kommutativen Teilkörper besitzt. Diese Aufgabe schließt sich an die drei Arbeiten von Hasse, Noether und Chevalley an, welche in dem Gedächtnisband für Herbrand erschienen sind [Has34d], [Noe34], [Che36]. – Wir sehen hier, dass Noether offenbar noch von USA aus als (inoffizielle) Herausgeberin der Mathematischen Annalen wirkte.

[2]Gemeint ist die Dissertation von Hermann Ludwig Schmid [Sch35b]. Darin werden explizite Formeln für das Normenrestsymbol bei zyklischen Erweiterungen vom Grad p bei algebraischen Funktionenkörpern der Charakteristik p angegeben.

[3]Hasse bezieht sich auf die Dissertation von Käte Hey in Hamburg 1927 bei Artin [Hey29]. Darin werden die Zetafunktionen von Schiefkörpern über algebraischen Zahlkörpern definiert und untersucht, insbesondere geht es um die Funktionalgleichung. Die Heysche Dissertation enthielt einige Fehler, die später von Max Zorn (einem Doktoranden Artins) in einer Note in den Hamburger Abhandlungen [Zor33] beseitigt werden konnten. Wie Zorn darlegte, können die Resultate von Hey dazu benutzt werden, das Lokal-Global-Prinzip für Algebren über Zahlkörpern zu beweisen. Deuring sagt in seinem Buch über Algebren [Deu35a], dass dieser Beweis „*gleichsam die stärkste Zusammenfassung der analytischen Hilfsmittel zur Erreichung des Zieles*“ darstellt. Nach dem Bekanntwerden der Note von Zorn gab Emmy Noether ihrem Doktoranden Ernst Witt die Aufgabe, die Heysche Theorie über Funktionenkörpern mit endlichem Konstantenkörper anzuwenden. Dies hat Witt in seiner Dissertation [Wit34a] ausgeführt, wobei er gleichzeitig einen Riemann-Rochschen Satz für Algebren über Funktionenkörpern formulierte und bewies. Die Hassesche Bemerkung über die „Heysche Kanone in der Wittschen Montierung“ ist wohl so zu verstehen, dass die sehr eleganten Methoden von Witt nun wiederum auf den Zahlkörperfall übertragen werden sollen. Der „Rückschuss auf die klassische Klassenkörpertheorie wie zu Ihrem 50. Geburtstag“ bezieht sich auf Hasses Arbeit [Has33b], die er Emmy Noether gewidmet hatte zu ihrem 50. Geburtstag im März 1932. Dort hatte Hasse gezeigt, wie man mit Hilfe des Lokal-Global-Prinzips für Algebren das Artinsche Reziprozitätsgesetz herleiten kann.

[4]Im vorangegangenen Brief vom 31. 10. 1934 hatte Noether fälschlich behauptet, dass man den Artin-Iyanaga-Beweis für den Hauptidealsatz noch weiter wesentlich vereinfachen könne. Hasse zeigt nun, dass die Noethersche Argumentation nicht stichhaltig ist. Die Bezeichnungen lehnen sich an Iyanaga [Iya34] an. – Das Wittsche Gegenbeispiel [Wit36] ist in den Hamburger Abhandlungen erschienen.

[5]Die Probleme der DMV mit Bieberbach in politischer Hinsicht wurden teilweise in der Fußnote 7 zu dem vorangegangenen Brief Noethers vom 31. 10. 1934 angesprochen. Der „Kampf“ mit Bieberbach dauerte bis zum Februar 1935. In einem Brief Hasses an Hermann Weyl vom 11. Februar 1935 heißt es: „*Heute kann ich Ihnen folgendes berichten: Vor 2 Wochen ist in der Deutschen Mathematikervereinigung endlich Friede geschlossen worden. In einer Ausschuss-Sitzung in Berlin sind Blaschke und Bieberbach gleichzeitig zurückgetreten . . .* “

[6]Dies deutet darauf hin, dass Emmy Noether nicht aus der DMV ausgetreten war und somit als Mitglied geführt wurde.

79 23.11.1934, Noether an Hasse, Postkarte

23. 11. 34

Lieber Herr Hasse!

Sie haben natürlich ganz recht, daß meine „Vereinfachung“ der Klassenkörpertheorie nicht geht. Irgend etwas, z.B. hyperkomplexe Funktionalgleichung, braucht man schon wenn man die Abzählung hinauswirft. Dagegen ist meine Vereinfachung des Hauptidealsatzes wirklich richtig! [1]

Haben Sie sich die Lefschetz-Literatur angesehen? [2] Nach der Lektüre der Arbeit von Weyl über Riemannsche Matrizen (im letzten Heft der Annals) bin ich wieder zweifelhaft, ob sie sich mit Ihren Meromorphismenringen decken. Das muß sich aber wohl entscheiden lassen! [3]

Rademacher ist seit Anfang November in Philadelphia.[4] Deuring schreibt daß er seinen hyperkomplexen Bericht Ende Oktober an Neugebauer abgeschickt hat.[5]

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 23.11.1934

[1] Vgl. die nächste Postkarte vom 28. 11. 1934, in der Noether diese Behauptung zurückzieht, nachdem Hasse sie auf den Irrtum aufmerksam gemacht hatte (Brief Hasses vom 19. 11. 1934).

[2] Vgl. Noethers Brief vom 31. 10. 1934, sowie Hasses Antwort vom 19. 11. 1934.

[3] Die „Riemannschen Matrizen“ spiegeln die Perioden-Relationen für Jacobische Mannigfaltigkeiten wider. Die dazugehörigen Algebren sind im wesentlichen die Endomorphismenringe der Jacobischen Mannigfaltigkeiten, also die „Meromorphismenringe“ in der Hasseschen Terminologie. Allerdings geht es Hasse darum, diese Meromorphismenringe *algebraisch* zu erfassen, und dazu nützen die Riemannschen Matrizen in ihrer klassischen Definition nichts, denn die Perioden sind ihrer Natur nach *transzendente* Bildungen. Es ist nicht klar, ob Noether diesen Zusammenhang erkannt hatte.

[4] Zu Rademacher siehe Anmerkung 8 zum Brief vom 31. 10. 1934.

[5] Zum „hyperkomplexen Bericht“ Deurings vgl. auch die Anmerkung 7 zum Brief vom 8. 11. 1931.

Der Name Deuring kommt in den Briefen von Emmy Noether sehr oft vor, wie ein Blick in unser Namenverzeichnis zeigt. Das erste Mal erwähnt sie Deuring im Brief vom 13. 11. 1929 noch ohne Namensnennung, als „einen der besten hiesigen Studenten“. Im Laufe der Zeit berichtet sie Hasse immer wieder über Deurings neueste Ergebnisse. Somit spiegelt der Briefwechsel Hasse-Noether die Entwicklung Deurings von „einem der besten Studenten“ bis zum Mitarbeiter und Partner Noethers wider. Wir haben Olga Taussky-Todd gefragt nach ihrer Erinnerung über das Verhältnis Noethers zu dem 25 Jahre jüngeren Deuring, und sie hat uns in einem Brief vom 2. September 1986 wie folgt geantwortet:

> *They were colleagues in spite of the age difference. Deuring was allowed to call her „Du“ and their conversation was simply „talking shop“ (in German: fachsimpeln).*

Insbesondere nahm Noether regen Anteil an der Entstehung des Deuringschen Ergebnisberichts über Algebren [Deu35a], und sie hat Deuring dabei oft beraten. Schließlich war sie es gewesen, die den noch jungen Deuring als Autor vorgeschlagen hatte. Gleich zu Beginn des Projekts, am 8. 11. 1931, schrieb sie an Hasse, dass „alles Neue mit hinein" solle. Dass sich die Fertigstellung des Manuskripts verzögerte, vom ursprünglich vorgesehenen Mai 1932 bis zum Herbst 1934, lag wesentlich daran, dass sich in schneller Folge immer neue Resultate aus der Algebrentheorie einstellten: Zyklizität der Divisionsalgebren über Zahkörpern, Lokal-Global-Prinzip, Struktur der Brauer-Gruppe, Lokales Normsymbol und Klassenkörpertheorie, u.v.a.m. Immer wieder mahnt sie Hasse in ihren Briefen, doch Korrekturfahnen oder Manuskript-Kopien zu senden, die sie Deuring zur Verarbeitung für sein Buch weitergeben kann. Es ist anzunehmen, dass Noether das Buchmanuskript von Deuring mehrfach durchgesehen und kommentiert hat. Wir zitieren Deuring selbst, der am 26. 6. 1934 an Neugebauer als den Herausgeber der Reihe „Ergebnisse der Mathematik" schrieb, dass sich die Abgabe des Manuskripts leider verzögere, denn:

> *der größte Teil des Manuskripts befindet sich noch in den Händen von Prof. E. Noether, auf deren wertvolle Bemerkungen ich nicht verzichten will.*

Um es deutlich zu sagen: Zwar ist der Stil und die Diktion des Buches durchaus eigenständig von Deuringscher Art; das erkennt man leicht, wenn man mit den übrigen Publikationen von Noether vergleicht. (Siehe dazu auch [Roq89].) Jedoch ist der Inhalt und das Konzept des Deuringschen Buches nach Ausweis aller zur Verfügung stehenden Quellen in enger Zusammenarbeit mit Noether entstanden.

In dieser Situation erstaunt es etwas, dass Deuring in dem Vorwort zu seinem Bericht den Anteil von Emmy Noether und ihren „wertvollen Bemerkungen" mit keinem Wort erwähnt. Wir können uns das nur so erklären, dass Emmy Noether selbst von einer öffentlichen Nennung ihres Namens in diesem Zusammenhang abgeraten hat, damit Deuring, dessen Förderung ihr sehr am Herzen lag, deswegen keine Unannehmlichkeiten in Nazi-Deutschland bekäme. Zwar haben wir keine Belege dafür, jedoch würde dies im Einklang stehen mit Berichten, die über Noether von anderen Situationen erzählt werden, nämlich dass sie ihre eigene Persönlichkeit stets zurückstellte zugunsten ihrer jüngeren Kollegen und Mitarbeitern. Siehe z.Bsp. van der Waerdens Artikel [vdW97], in dem er berichtet, dass Noether auf die Publikation eines ihrer Ergebnisse verzichtete, damit er (van der Waerden) die Gelegenheit zur Publikation erhielt, obwohl er dasselbe Ergebnis erst viel später erhalten hatte.

---

80 28.11.1934, Noether an Hasse, Postkarte

28. 11. 34

L. H. H.!

Ich wollte Ihnen schreiben, daß ich jetzt endlich aufgewacht bin –bei meiner Karte neulich war ich es noch nicht – und gesehen habe daß ich den Anfang des Hauptidealbeweises für das Ende genommen habe, als Ihr Brief kam. Vielen Dank! [1]

Die Klassenkörpertheorie wird sich ganz schön ausbreiten; z.B. sagte mir Ward[2], aus Pasadena in Kalifornien, dies Jahr im Institut in Princeton, daß er seine Hauptzeit zum Studium Ihrer Ausarbeitung verwendet.[3] Er gehört mit Zariski zu den Professoren unter den Zuhörern; und letzterer fängt an sich in die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen zu stürzen! Den hyperkomplexen Aufbau werde ich gern ein anderes Jahr bringen – ich konnte ja weder Diskriminantensatz noch sonst etwas voraussetzen – wenn dann nicht die Zuhörer absolut gewechselt

haben. Sagen Sie doch bitte Ulm noch mal daß er seine abelschen Gruppen schickt; ich habe ihm schon geschrieben.[4]

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 28.11.1934

[1] Vgl. Noethers Briefe vom 31. 10 und 23. 11. 1934 und Hasses Antwort vom 19. 11. 1934.

[2] Morgan Ward war am California Institute of Technology (CALTECH) tätig.

[3] Gemeint ist wieder die Ausarbeitung von Hasses Marburger Vorlesungen über Klassenkörpertheorie [Has33d].

[4] Ulm hatte 1933 in Bonn bei Otto Toeplitz promoviert. Aus dieser Zeit gibt es zwei Arbeiten von Ulm. Die erste, über die Struktur von abzählbar unendlichen abelschen Gruppen, war schon 1933 in den Mathematischen Annalen [Ulm33] erschienen. Diese muss Noether wohl gekannt haben; meint sie vielleicht, dass er ihr einen Sonderdruck schicken soll? Vielleicht möchte sie aber auch das Manuskript seiner zweiten Arbeit haben, zur Theorie der nicht-abzählbaren primären abelschen Gruppen [Ulm35] ?

---

81 17.12.1934, Hasse an Noether

Göttingen, den 17. Dezember 1934

Liebe Fräulein Noether,

Herzlichen Dank für Ihren inhaltsreichen Brief! Ich kann mir gut vorstellen, dass Sie bei dem stürmischen Wetter und den nichtstaugenden Klassen Ihre Zeit damit verbringen, auf den Zehenspitzen zu tanzen, dass Sie kaputt sind, keine Freude an den rohen Mahlzeiten haben aber schliesslich doch froh sind dort zu sein. Dass Sie mich brauchen und dafür Geld, Liebe, Bier, Schlafen, Essen und Ferien opfern wollen, ehrt mich sehr. Wohingegen es mich beschämt, dass Sie mir garnichts zu danken haben.[1]

Nun ernst: beiliegend sende ich Ihnen auf Wunsch von Herrn Nehrkorn das Manuskript seiner gemeinsamen Arbeit mit Chevalley für die Mathematischen Annalen.[2] Vom Standpunkt der rein arithmetisch[en] Begründung der Klassenkörpertheorie scheint mir damit das Maximum erreicht. Ich glaube nicht, dass es ohne eine ganz neue Methode gelingen wird, den Hauptsatz über Algebren rein arithmetisch zu beweisen.[3]

Mit besten Wünschen for a Merry X-mas and a Happy New Year

Ihr H. Hasse

P.S. Bitte auch um Grüsse an die Unterzeichner Ihres inhaltsreichen Briefes. Für die Übersendung einer Anzahl BlankoSchecks dieser Art zur Einsparung meiner wertvollen Zeit wäre ich Ihnen sehr dankbar.[4]

Anmerkungen zum Dokument vom 17.12.1934

[1]Offenbar handelt es sich um die Antwort auf eine scherzhafte Grußkarte (die nicht erhalten geblieben ist), wie sie von parties etc. verschickt werden. Den Inhalt von Noethers Ausführungen können wir implizit aus Hasses Antwort entnehmen. Wir werden dabei erinnert an den Bericht, den Olga Taussky von ihrem Kontakt mit Emmy Noether in diesen Monaten gibt: „*I do not wish to give the impression that she was in a bad or depressed mood all that academic year. But certainly she was in a very changeable mood.*“ Und an den Bericht von Brauer an Hasse vom 18. 4. 1935: „*Das einzig Trübe war für Emmy das starke Heimweh nach Göttingen und ihren Freunden... Sie sprach sehr viel von Ihnen.*“

[2]Chevalley und Nehrkorn waren beide Hörer der Artinschen Vorlesung im Jahre 1932 gewesen. In ihrer Arbeit hatten sie gezeigt, dass die Klassenkörpertheorie rein arithmetisch (also ohne analytische Hilfsmittel) aus der Summenformel für die Hasseschen Invarianten einer Algebra hergeleitet werden kann. Die Arbeit erschien 1935 in den Mathematischen Annalen [CN35]. Die Tatsache, dass Hasse die Arbeit an Emmy Noether schickte, zeigt, dass Emmy Noether immer noch, also auch nach Ihrer erzwungenen Emigration, als (inoffizielle) Herausgeberin der Mathematischen Annalen betrachtet wurde.

[3]Noch im selben Jahr 1935 allerdings kündigte Chevalley in den Comptes Rendus Paris an, dass es ihm gelungen sei, die Klassenkörpertheorie vollständig ohne analytische Hilfsmittel aufzubauen: [Che35].

[4]Hier fällt Hasse wieder in den scherzhaften Ton der ersten Sätze seines Briefes zurück.

---

82 07.04.1935, Noether an Hasse

Bryn Mawr College, 7.4.35

Lieber Herr Hasse,

Vielen Dank für Ihre Separatensendung – ich bewundere immer wieder wieviel Sie schaffen – und für die Abschrift des Briefes an Albert.[1] Die additiven verschränkten Produkte und die „Summandensysteme“ – einiges ist ja in der neusten Crellearbeit von Witt schon erschienen – haben mir viel Vergnügen gemacht.[2]

Brauer läßt darauf aufmerksam machen, daß der Zusammenhang zwischen quadratischen Formen und Algebren (S. 18) inkl. des Beweises der Produktdarstellung [3] $H = \prod_{i \leq k}(a_i, a_k)$ (Artin) den Physikern wohlbekannt ist: Dirac hat das benutzt und in einer Note von Weyl und ihm (als Assistenten), von der er eben Korrektur hatte, wird es in der Theorie der Spinoren benutzt[4]. Im Spezialfall der Summe von Quadraten soll es schon in dem Artikel von Cartan über hyperkomplexe Systeme, in der französischen Enzyklopädie stehen.

Daß das Zerfallen der Faktorensysteme im multipl[ikativen] Fall als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Erweiterung bekannt ist, weiß Witt wohl? Das ist ja das Resultat von Brauer, das Sie Jahresber[icht] 44 erwähnen.[5]

Brauer hat ziemlich sichere Aussicht, als Assistenz-Professor nach Toronto zu kommen; die Trustees müssen es nur noch genehmigen.[6]

Die elegante sukzessive Konstruktion der zyklischen Normalform scheint mir beträchtlich vernünftiger als eine unübersichtliche direkte; die sukzessiven „Summandensysteme“ sind eben die Invarianten.[7]

Im Zusammenhang damit interessiert Sie vielleicht eine explizite Angabe der „Normalbasis“, die ich einstweilen für den Fall, daß die Charakteristik von K/k nicht im Grad aufgeht, von meiner hiesigen Doktorandin habe ausführen lassen.[8]

Es seien $E^{(1)}, \ldots, E^{(r)}$ die irreduziblen Zentrumsidempotente des Gruppenrings $(G)_k$ der Galoisgruppe von K/k, mit k als Koeffizientenbereich. Dann gibt es zu jedem $E^{(i)}$ Elemente z_i aus K, sodaß $E^{(i)} z_i \neq 0$. (Ist $E^{(i)} = \sum S_\lambda \alpha_\lambda$, so heißt das also: $\sum z_i^{S_\lambda} \alpha_\lambda \neq 0$). Jedes Element $w = \sum_i E^{(i)} z_i$ (keine Komponente Null) ist Träger einer Normalbasis – die w^S linear unabh. – und so erhält man *alle* Normalbasen. Geht man insbesondere von irgend einer Basis $z_1, \ldots, z_n$ aus, so kann man die z_i aus diesen wählen; erhält so eine explizite rationale Konstruktion.

Im Fall daß p im Grad aufgeht, wird man vermutlich auf die Kompositionsreihe der einfachen Darstellungen zurückgehen müssen, ähnlich wie Witt im zyklischen Fall.

Ein weiteres Resultat ist die Bestimmung der Diskriminante des Zentrums des ganzzahligen Gruppenrings – also die Klassen konj[ugierter] Elemente als Basis – zu $n^r \cdot \prod_1^r h_i \Big/ \prod_1^r f_i^2$. Dabei bedeutet r den Rang des Zentrums (Anzahl der abs[olut] irreduziblen Darstellungen), h_i die Anzahl der Elemente in den einzelnen Klassen konj[ugierter] Elemente, f_i die Grade der abs[olut] irreduz[iblen] Darstellungen. Insbesondere ist also dieser Bruch eine ganze Zahl, was aber vielleicht auch aus bekannten Formeln folgt (es ist schwächer als daß die Grade f_i in n aufgehen; d.h. keines der beiden Resultate scheint aus dem andern zu folgen). Ich habe diese und bekannte Formeln aus der Theorie der komplementären Basen ableiten lassen.[9]

Waren Sie in Helsinki[10] und was machen Sie im Sommer? Ich weiß noch nicht ob ich dieses Jahr wieder komme; wenn ja wird es Ende Juni. Ich muß beim „Commencement“ (Schlußfeier) besagte Doktorandin feierlich zum Doktorhut (Hood, eine Art Kapuze) vorschlagen; aufgesetzt bekommt sie den von der Präsidentin.

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether.[11]

Anmerkungen zum Dokument vom 7.4.1935

[1]Eine Abschrift dieses Briefes von Hasse an Albert, datiert am 2. 2. 1935, ist im Hasse-Nachlass erhalten. Er enthält auf 21 Seiten einen ausführlichen Bericht über die neueren Ergebnisse, die im Kreis um Hasse in Göttingen erhalten wurden, u. a. die Darstellung einer Vorstufe der Theorie der Wittschen Vektoren zur Konstruktion zyklischer Erweiterungen von p-Potenzgrad über einem Grundkörper der Charakteristik p.

[2]Ein „Summandensystem“ ist das additive Analogon zu einem multiplikativen „Faktorensystem“ im Sinne von Emmy Noether. In heutiger Terminologie handelt es sich also um 2-Zyklen in einer additiven Gruppe. Hasse berichtet über Witts Satz, dass bei einer Galois-Erweiterung $K|k$ jedes Summandensystem der Galoisgruppe zerfällt, dass also die 2-Kohomologie der additiven Gruppe K^+ verschwindet. Dieser Satz findet sich in der Tat schon in [Wit35a], wie Noether bemerkt.

[3]Im oben erwähnten Brief von Hasse an Albert, auf den sich Noether bezieht, findet sich u.a. der folgende Text auf den Seiten 16-18:

„*You will remember my writing you about a certain connexion between general quadratic forms and linear algebras. Two years ago Artin proved that for a quadratic form*

$$f(\mathfrak{x}) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 , \quad a_i \neq 0$$

with coefficients a_i in an arbitrary field k (not of characteristic 2) the normal simple algebra of exponent 2 and order $4^{\frac{n(n+1)}{2}}$ over k :

$$H = \prod_{i \leq k} (a_i, a_k)$$

is an invariant. Here (a, b) denotes the generalised quaternion algebra over k generated by

$$u^2 = a , \quad v^2 = b , \quad vu = -uv .$$

Artin's proof depends on certain identities between minors of a general symmetric matrix $A = (a_{ik})$. Witt found a very much nicer and simpler proof, that shows moreover explicitly the close connexion between the form $f(\mathfrak{x})$ and the algebra H . . ."

Hasse gibt dann eine Skizze des Wittschen Beweises. Heute wird H als die „Hasse-Algebra" der quadratischen Form f bezeichnet, da sie im Falle von lokalen Zahlkörpern im wesentlichen auf die frühen Hasseschen Arbeiten über die Äquivalenz quadratischer Formen zurückgeht. Artin hatte seinen Beweis in der Vorlesung gebracht, aber anscheinend niemals veröffentlicht. Der Wittsche Beweis wurde später in [Wit37b] publiziert. Wir sehen, dass eine frühe Fassung der Wittschen Arbeit schon Emmy Noether zur Kenntnis gebracht wurde.

[4]Es handelt sich um die Arbeit [BW35] mit dem Titel: „Spinors in n dimensions". Zu der damaligen Zeit arbeitete Brauer am Institute for Advanced Study in Princeton als Assistent von Hermann Weyl.

[5]Hier geht es um die Frage, ob eine zyklische Erweiterung $k|k_0$ von Primzahlpotenzgrad p^{h-1} in eine zyklische Erweiterung $K|k_0$ vom Grad p^h eingebettet werden kann. Hasse berichtet in seinem Brief an Albert, dass Witt diese Frage beantworten kann: Im Falle der Charakteristik p ist das immer möglich, im Falle der Charakteristik $\neq p$ jedoch nicht immer, und es wird dafür eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben. Falls k_0 eine primitive p-te Einheitswurzel ζ enthält, so besagt diese Bedingung, dass ζ Norm aus k ist.

Dies läßt sich deuten als der Zerfall des durch ζ definierten Faktorensystems von $k|k_0$. Noether macht nun darauf aufmerksam, dass diese Zerfalls-Bedingung nach [Bra32b] bekannt ist, und sie fragt an, ob Witt das wohl weiß. Sie verweist dazu auf Hasses Lösung einer Aufgabe, die von van der Waerden gestellt worden war, nämlich: „*Welche quadratischen Zahlkörper lassen sich in zyklische Körper* 4*-ten Grades einbetten?*" Im Jahresbericht der DMV (Band 44, 1934) gibt Hasse drei Lösungen dieser Aufgabe: eine auf klassenkörpertheoretischer Grundlage, eine auf Kummerscher Grundlage und eine mittels der Algebrentheorie. Im Anschluss an die algebrentheoretische Lösung gibt Hasse (indem er sich auf eine Mitteilung von van der Waerden stützt) eine Lösung des allgemeinen Problems der Einbettung von zyklischen Körpern in zyklische Körper, unter Verweis auf den von Noether zitierten Satz in [Bra32b]. – Übrigens findet sich im selben Band des Jahresberichts die von Hasse gestellte Aufgabe 169: „*Unter welchen Bedingungen läßt sich ein über einem algebraischen Zahlkörper K_0 zyklischer Körper K_1 vom Primzahlgrad ℓ in einen über K_0 zyklischen Körper K_n vom Grad ℓ^n einbetten?*" Das Eingangsdatum dieser Aufgabe ist der 10. 10. 1933, also eine Woche früher als das Eingangsdatum 17. 10. 1933 der Hasseschen Lösung der oben genannten van der Waerdenschen Aufgabe – in welcher Hasse nun auch gleichzeitig seine vor einer Woche gestellte allgemeinere eigene Aufgabe löst.

[6]Richard Brauer hatte die Stelle in Toronto auf besondere Empfehlung von Emmy Noether bekommen, die Toronto kurz zuvor besucht hatte. Brauer blieb 13 Jahre in Toronto; diese Zeit gilt als die Zeit der fruchtbarsten Jahre für Brauers Arbeit.

[7]Witt gelangt, wie Hasse in seinem Brief an Albert berichtet, zu einem sukzessiven Aufbau einer zyklischen Erweiterung vom Grade p^h durch Teilschritte vom Grad p. Zu jedem solchen Teilschritt gehört ein „Summandensystem" im kleineren Körper, dass in dem über ihm liegenden größeren Körper zerfällt. Diese Summandensysteme sind vermöge des Spur-Operators und des Artin-Schreier-Operators miteinander verbunden. Das meint Noether offenbar, wenn sie von der „sukzessiven Konstruktion" spricht.

Ein Jahr später, im Sommersemester 1936, fand in Göttingen die legendäre Arbeitsgemeinschaft statt, in der u.a. Witt den Formalismus der heute so genannten *Wittschen Vektoren* fand [Wit37c]. Gestützt auf die Wittschen Vektoren gibt Witt in der genannten Arbeit tatsächlich eine „direkte" und gleichzeitig besonders „elegante" Normalform für zyklische p-Erweiterungen. Hätte Noether das noch zur Kenntnis nehmen können, dann würde sie sicherlich die direkte Normalform mit Wittschen Vektoren der „sukzessiven" Normalform vorgezogen haben.

[8] Es handelt sich um Ruth Stauffer. Ihre Dissertation (Bryn Mawr) erschien im American Journal of Mathematics [Sta36]. – Die Existenz einer Normalbasis für eine beliebige Galoissche Körpererweiterung wurde wohl zuerst von Emmy Noether bewiesen [Noe32b]; vgl. dazu auch den Brief vom 22. 08 .1931 und die folgenden Briefe. Dort wurde allerdings der Grundkörper als unendlich vorausgesetzt; ohne diese Voraussetzung gab dann Deuring einen Beweis [Deu32]. Dabei handelte es sich jedoch um reine Existenzbeweise. In der Staufferschen Dissertation geht es nun um die Aufstellung eines expliziten Verfahrens zur Konstruktion einer Normalbasis.

[9] Zu dieser Formel hat sich E. Dade auf unsere Anfrage wie folgt geäußert: „*It is straight-forward and would surely have been possible at the time of Burnside and Frobenius if any one had just asked the question. Apparently nobody asked the question about the discriminant at the time.*"

[10] Wie bereits in einem Kommentar zum Brief vom 26. 4. 1934 gesagt, hatte Hasse vorgehabt, im Herbst 1934 einer Einladung zu Vorträgen in Helsinki zu folgen. Diese Reise musste er jedoch absagen. Am 13. August 1934 schrieb Hasse aus Göttingen an Nevanlinna:

> „*Die vergangenen Monate haben mir im Zusammenhang mit meiner Berufung nach Göttingen viele Aufregungen gebracht. Ich hatte gehofft, dass ich bis zum September über all das äußerlich und innerlich hinweg sein würde. Ich sehe aber jetzt, dass das nicht der Fall sein wird... Nach reiflicher Überlegung bin ich zu der Überzeugung gekommen, dass es besser ist, wenn ich meine beabsichtigte Reise zu Ihnen auf einen späteren Zeitpunkt verschiebe... Ich fühle mich nicht in der Lage, mich in wissenschaftliche Fragen zu vertiefen... Und schliesslich fühle ich mich augenblicklich innerlich der Aufgabe nicht gewachsen, als Vertreter der deutschen Wissenschaft im Ausland aufzutreten...*"

Die turbulenten Verhältnisse in Göttingen und in der Deutschen Mathematiker Vereinigung (DMV) nach der Machtübernahme der nationalsozialistischen Regierung sind oft dargestellt worden und brauchen daher hier nicht erläutert zu werden. Die Reise von Hasse nach Finnland wurde im Oktober 1938 nachgeholt.

[11] Dies ist der letzte Brief von Emmy Noether an Hasse. Sie starb eine Woche später.

Briefe danach

83 15.04.1935, Weyl an Hasse, Telegramm

hasse mathematical institute gottingen[1]

emmy noether died yesterday
by sudden collapse after successful
operation of tumor few days ago
buriel wednesday brynmawr

weyl

Anmerkungen zum Dokument vom 15.4.1935

[1] Auf dem Telegramm ist kein Datum zu erkennen. Emmy Noether starb am 14. 4. 1935.

84 15.04.1935, Fritz Noether an Hasse

F. Noether,
z. Z. Uhlandstr. 63
bei Kaufmann.

Berlin, 15. April
1935.

An den Vorstand der D. Mathematiker–Vereinigung,
z. H. Herrn Prof. Hasse.

Sehr geehrter Herr Kollege!

Einem eben erhaltenen Kabeltelegramm zufolge ist meine Schwester, Emmy Noether, in Bryn Mawr, Pennsylvania, infolge einer Operation verschieden. Näheres ist mir noch nicht darüber bekannt, doch muß die Erkrankung eine sehr kurze gewesen sein, da in ihrer regelmäßigen Korrespondenz bis zuletzt keinerlei Andeutung davon zu finden war.

Da ich selbst nur vorübergehend hier bin und in der allernächsten Zeit nach Russland zurückkehre[1], so muß ich mich jetzt mit dieser Mitteilung begnügen.

Mit kollegialem Gruß,
Ihr ergebener

F. Noether.

(Tomsk, Forsch. Inst. f. Math. u. Mech.) .

P. S. Die Einäscherung und Beisetzung findet in Bryn Mawr statt.

Anmerkungen zum Dokument vom 15.4.1935

[1]Fritz Noether war Professor für Angewandte Mathematik an der Technischen Hochschule in Breslau gewesen, emigrierte jedoch 1933, nach seiner Entlassung, in die Sowjet-Union, wo er an der Kubishev-Universität in Tomsk lehrte. Wie aus seinem Schreiben hervorgeht, hielt er sich gerade in Deutschland auf, als er die Todesnachricht seiner Schwester Emmy erhielt.

---

85 18.04.1935, Hasse an Weyl

Göttingen, den 18. April 1935

Lieber Herr Weyl!

Die Nachricht von Emmy Noethers plötzlichem Tod hat uns alle hier tief erschüttert. Ich danke Ihnen sehr, dass Sie mich so schnell in Kenntnis setzten. Hoffentlich war es Ihnen möglich, auf mein Telegramm hin noch rechtzeitig einen Kranz von den Göttinger Mathematikern am Grabe niederzulegen. Ich möchte Sie bitten, mich doch recht bald Ihre Auslagen dafür wissen zu lassen. Sie nehmen mir doch bitte nicht übel, dass ich Sie der Eile halber damit beauftragen musste. Es war mir zu unsicher bei der Kürze der Zeit, eine internationale Blumengesellschaft damit zu beauftragen.[1]

Sehr erfreut hat mich, dass Sie meiner Anregung wegen Herrn Schilling so schnell haben nachkommen können. Herr Sch. hat sich riesig gefreut. Er geht jetzt für den Sommer erst nach Cambridge (Engl.) und wird dann im Winter nach Princeton kommen.[2]

Von hier ist nichts Wesentliches zu berichten. Daß Heesch zum 1. April endgültig ausgeschieden ist, werden Sie wohl schon gehört haben, er war nicht länger zu halten.[3] Ulm ist ebenfalls zum 1. April von hier fortgegangen, er hat die Köthesche Stelle in Münster übernommen, während Köthe in die Prüfersche Stelle eingerückt ist.

Wenn es sich als erwünscht erweisen sollte, stehe ich natürlich gern für die Durchsicht eventuell nachgelassener Papiere von Emmy Noether zur Verfügung.

Mit herzlichen Grüssen, stets Ihr H. Hasse

Anmerkungen zum Dokument vom 18.4.1935

[1]Weyl erwähnte in seinem Telegramm, dass die Beerdigung am Mittwoch stattfinden würde, also am 18. 4. 1935, das waren drei Tage nach dem Telegramm von Weyl.

[2]O.F.G. Schilling hatte bei Emmy Noether in Göttingen studiert und dann bei Hasse in Marburg promoviert. Danach äußerte er den Wunsch, im Ausland zu studieren. Hasse hatte an Weyl geschrieben, ob Schilling vielleicht eine formale Einladung an das Institute for Advanced Study erhalten könne, da sonst das notwendige Visum nicht ausgefertigt werden kann. Finanziell war Schilling unabhängig; sein Vater besaß eine angesehene und gutgehende Glockengießerei in Heidelberg. Später (1938) entschloss sich Schilling, nach Beratung durch Hasse, in den USA zu

bleiben und eine Stelle als Mathematiker an einer Universität anzustreben, statt die elterliche Firma in Heidelberg zu übernehmen.

[3]Heinrich Heesch hatte 1929 in Zürich bei Speiser promoviert, mit einer Arbeit zur Kristallographie. 1930 ging er als Assistent von Hermann Weyl nach Göttingen. 1933, als Weyl Göttingen verließ, wurde er mit der vertretungsweisen Wahrnehmung der Lehraufgaben Weyls beauftragt. Seine Habilitation in Göttingen war nicht möglich, weil er sich weigerte, dem damals obligatorischen Nationalsozialistischen Dozentenbund beizutreten. Nach Ablauf seiner Assistentenstelle arbeitete er als Privatgelehrter über Kristallographie und das Parkettierungsproblem; seine Ideen wurden in Künstlerkreisen und besonders auch in der Industrie akzeptiert und gefördert. 1958 habilitierte er sich an der Technischen Hochschule Hannover. Er wurde weltweit bekannt durch seine Arbeiten zum Vierfarbenproblem, die wesentlich zu dessen Lösung durch Haken beigetragen haben. Näheres über die Biographie von Heesch siehe [Hee86].

---

86 18.04.1935, Brauer an Hasse

Princeton, den 18. April 1935

Lieber Herr Hasse,

Sie werden Näheres über Emmy Noethers Tod erfahren wollen und ich möchte Ihnen berichten, was ich weiß. Am 2. April war sie zum letzten Mal hier, so frisch wie immer. Sie erzählte vergnügt von einem kleinen Ausflug mit einigen ihrer Schülerinnen, daß sie mehr aushielte und kräftiger sei als die jungen Mädchen. Als sie am Nachmittag in ihrem Seminar einen Beweis auf die nächste Stunde verschob, hätte es niemand glauben können, daß diese Stunde nie mehr sein würde. Am darauf folgenden Sonnabend[1] schrieb sie, daß sie sich einer Operation unterziehen müsse und leider ein paar Male ihr Seminar ausfallen müsse, sie würde es aber im Mai, wie sie denke, fortsetzen können und hoffe, daß ihre Hörer noch alle da seien. Bei der Operation handle es sich um die Entfernung eines Myoms. Der Ton ihres Briefes schien anzudeuten, daß sie die Sache sehr leicht nahm. Sie schrieb auch noch über einige ganz nebensächliche Dinge, die sie nun nicht erledigen könne. Ob sie sich selbst Gedanken machte, weiß niemand. Sie wissen ja auch, daß Emmy nicht liebte zu zeigen, daß sie beunruhigt war. Natürlich waren ihre Freunde hier ziemlich besorgt.

Die Operation fand am 10. April statt und schien glatt von statten gegangen zu sein. Am nächsten Tag hatte sie zwar naturgemäß starke Schmerzen, erholte sich dann aber gut. Eine Bryn Mawrer Kollegin, die sie am Sonnabend früh besuchte, fand sie besonders vergnügt und optimistisch. Am Nachmittag wurden keine Besucher mehr hereingelassen, das Befinden hatte sich plötzlich stark verschlechtert. Worum es sich handelte, wissen wir hier nicht genau, die Erzählungen und Nachrichten aus Bryn Mawr geben kein klares Bild. Am Sonntag hieß es, daß eine Embolie vorliege, aber das stimmte mit anderen Erzählungen nicht überein. Es ist ja nun auch gleichgültig geworden. Sicher war am Sonntag der Zustand fast ganz hoffnungslos und Emmy hat sich sehr quälen müssen. Sie war aber höchstens bei halbem Bewußtsein. Am frühen Nachmittag ist sie dann gestorben. Ob sie sich

selbst noch über die Nähe des Todes klar geworden ist, läßt sich nicht sagen. Man darf hoffen, daß es nicht der Fall war.

Über das letzte Jahr hier ist zu sagen, daß Emmy sich sehr wohl gefühlt hat. Sie hatte sich ihre Sachen aus Göttingen zum großen Teil herüberkommen lassen und hatte sich riesig nett und behaglich eingerichtet. Bryn Mawr war stolz auf sie und suchte ihr alles ganz nach ihrem Geschmack einzurichten. Es bestand der Plan, eine dauernde Forschungsprofessur für sie zu begründen. Sie hatte einen Kreis von Schülerinnen, die mit allem Fleiß Klassenkörpertheorie mit ihr arbeiteten. Außerdem hatte sie hier in Princeton ein Seminar über Klassenkörpertheorie.[2] Ein junges Mädchen hat gerade noch eine Dissertation bei ihr in Bryn Mawr fertig machen können, Miss Stauffer[3]. Emmy hatte sie auch menschlich sehr in ihr Herz geschlossen. In Bryn Mawr und in Princeton hat Emmy viele Freunde gefunden.

Die Anerkennung, die sie so sehr allgemein fand, ist ihr nicht ganz gleichgültig gewesen. Besonders freute es sie, daß man in ihr nicht nur die einzigartige Mathematikerin feierte, sondern sie in jeder Beziehung ganz voll nahm. Sie selbst interessierte sich hier für viele Dinge außerhalb der Mathematik.

Das einzig Trübe war für Emmy das starke Heimweh nach Göttingen und ihren Freunden. Sie wollte im Sommer nach Göttingen fahren und beschäftigte sich schon viel in Gedanken mit dieser Reise. Sie sprach sehr viel von Ihnen. Ihr Interesse konzentrierte sich ganz stark auf Ihre Arbeiten über algebraische Funktionen, sie malte sich mit Vorliebe aus, wie Sie die Theorie gestalten würden. Daneben war sie auch natürlich an dem Werk ihrer andern Freunde und Schüler interessiert, besonders noch an Deuring. Jeder Brief aus Deutschland war eine sehr große Freude für sie. Bis in die letzten Tage hat sie sich damit beschäftigt, wie es mit dem Fortkommen und der Zukunft ihrer einzelnen Schüler aussehen würde. An alle hat sie in gleicher Weise wie früher gedacht.

Persönlich bin ich glücklich, daß ich diesen Winter in ihrer Nähe habe verleben können. Meine Frau und ich haben das Glück gehabt, ihr menschlich sehr nahe treten zu dürfen. Wir haben einen sehr lieben Freund in ihr verloren.

mit herzlichsten Grüßen
Ihr
Richard Brauer

Wegen vieler Fragen, die noch entstehen werden (wie wissenschaftlicher Nachlaß) werde ich Ihnen noch schreiben. – Emmy Noethers Freunde in Deutschland sind doch wohl alle benachrichtigt? Es war nur an Sie telegrafiert worden.

Anmerkungen zum Dokument vom 18.4.1935

[1]Also 4 Tage nach dem Seminar am Dienstag, dem 2. April 1935.
[2]Vgl. Noethers eigenen Bericht an Hasse vom 6. 3. 1934.
[3]Vgl. Noethers Brief vom 7. 4. 1935.

87 30.04.1935, Weyl an Hasse

Princeton, New Jersey, April 30, 1935

Lieber Herr Hasse:

Ich glaube, dass Brauer Ihnen genauer über Emmy Noethers Krankheit und Ende geschrieben hat. Es ist uns nicht ganz klar, was ihren Tod so plötzlich herbeiführte, nachdem sie nach überstandener Operation schon auf dem besten Wege der Besserung schien. Aber sie hatte die beste und zuverlässigste ärztliche Hilfe. Die Berichte der Ärzte werden an ihren Bruder Fritz geschickt werden.

Ich nehme an, dass Sie unter den deutschen Mathematikern für Verbreitung der Trauernachricht gesorgt haben.[1] Es ist mir nicht bekannt, ob Fritz Noether während seiner Anwesenheit in Deutschland Traueranzeigen verschickt hat.[2] Jeder in unserer kleinen deutschen Gemeinde hier trauert um Emmy Noether, wie wenn er einen seiner nächsten Familienangehörigen verloren hätte.

Der Kranz der Göttinger Mathematiker schmückte ihren Sarg an sichtbarer Stelle. Sie wäre sicherlich dankbar gewesen für das Gedenken ihrer Göttinger Freunde!

Die Rechnung über 10 $ lege ich bei. Überweisen Sie bitte den Betrag an: Account Hermann Weyl, First National Bank, Princeton, New Jersey – in solcher Weise, dass meine Quittung nicht erforderlich ist. Denn ich reise am 18. Mai nach Europa ab; meine Adresse von dann ab ist: c/o Julius Bär & Co., Zürich, Schweiz.

Ich lege eine Abschrift der kurzen Ansprache bei, die ich an Emmys Sarg gehalten habe. Am 26. fand eine Feier zu ihrem Gedächtnis statt in Goodhart Hall in Bryn Mawr, wo ich (diesmal auf Englisch) versucht habe, eine ausführliche Würdigung ihrer Person und ihres Werkes zu geben. Vielleicht schicke ich Ihnen später eine Abschrift der Rede, vielleicht wird sie auch bald gedruckt. Die Freunde in Deutschland können sicher sein, dass hier alles geschah, um in würdiger Weise von der Toten Abschied zu nehmen.

Über den Nachlass müssen wir die Verfügungen von Fritz Noether abwarten. Das Mobiliar und der größere Teil der Bibliothek werden wohl hier bleiben. Wissen Sie, ob Emmy Noether ein Bankguthaben in Göttingen hatte und bei welcher Bank?

Der Generalschlüssel, von welchem Sie mir ein Konterfei schickten, findet sich nicht in meinem Gewahrsam.

Mit herzlichen Grüssen Ihr Hermann Weyl.

P.S. Ich habe es nachträglich für besser gehalten, die Nachschrift meiner Ansprache nicht beizulegen. H.W.[3]

P.S.2 Gerade will ich den Brief schicken, da trifft der Ihrige vom 18. April ein. Es freut mich, daß Schilling[4] herkommen kann. Über den Nachlass von Emmy Noether wird Brauer Ihnen schreiben wenn nötig und Ihre Hilfe in Anspruch nehmen. H.W.

Anmerkungen zum Dokument vom 30.4.1935

[1]Hasse hat das in einer Reihe von Briefen getan, z.Bsp. am 18. April 1935 an Deuring, Emmy Noethers „Lieblingsschüler“. Krull, ebenfalls ein Schüler von Emmy Noether, bedankt sich in einem Brief vom 16. 5. 1935 dafür, dass ihm Hasse einen Durchschlag von Brauers Brief geschickt hatte. (Dazu vgl. Dokument Nr. 86, Brief von Brauer an Hasse vom 18. 4. 1935.)

[2]Fritz Noether hatte in einem Brief vom 15. 4. 1935 an Hasse als Vorstandsmitglied der DMV eine Todesanzeige geschickt. (Vgl. Dokument Nr. 84, Brief von Fritz Noether an Hasse vom 15. 4. 1935.) Offenbar hatte Fritz Noether auch an andere Mathematiker Traueranzeigen geschickt, wie wir z.Bsp. einem Brief von Krull an Hasse vom 16. 5. 1935 entnehmen.

[3]Die Nachschrift dieser Ansprache hat sich im Nachlass von Weyl nicht gefunden. Seine Rede in Goodhart Hall in Bryn Mawr am 26. April 1934 ist publiziert und weithin bekanntgeworden; vgl. [Wey35]. Zusatz bei der Korrektur: Inzwischen haben wir den Text der Ansprache gefunden. Er wird an anderer Stelle veröffentlicht werden.

[4]Vgl. Brief von Hasse an Weyl vom 18. 4. 1935

---

88 06.05.1935, Fritz Noether an Hasse

Tomsk, 6. Mai 1935
Spasskaja 43.

Sehr geehrter Herr Kollege!

Ihre teilnehmenden Zeilen vom 18. 4. erhielt ich erst gestern hier, da ich inzwischen zurückgereist war, und danke Ihnen herzlich dafür, ebenso, daß Sie trotz der schwierigen Umstände eine Vertretung der Göttinger Mathematiker und vielleicht auch der D. M. V. veranlasst haben.[1]

Von Ihrem Anerbieten, bei der Durchsicht und Verwertung etwaiger nachgelassener mathematischer Papiere behilflich zu sein, werde ich gerne Gebrauch machen. Ich habe schon von Berlin aus in einem Briefe an Courant gebeten, daß sich einer der in der Nähe befindlichen Mathematiker, etwa Rademacher oder R. Brauer, fürs erste dieser Sache annehme. Da der gesamte Nachlass zunächst dem deutschen Konsul in Philadelphia anvertraut wurde, so muß ich auf dessen Bericht warten und werde Sie dann näher informieren.

Mit nochmaligem herzlichem Dank für Ihre Teilnahme und freundlichen Grüßen

Ihr ergebener

F. Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 6.5.1935

[1]Hasse hatte Weyl darum gebeten, zu veranlassen, dass bei der Beisetzungsfeier für Emmy Noether in Bryn Mawr ein Kranz mit dem Gruss der Göttinger Mathematiker niedergelegt wurde. Vgl. den Brief Hasses an Weyl vom 18. 4. 1935.

89 20.05.1935, Hasse an Weyl

Göttingen, den 20. Mai 1935

Lieber Herr Weyl!

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief vom 30. April. Ich habe heute die hiesige Commerz- und Privatbank den von Ihnen freundlicherweise ausgelegten Betrag von 10 Dollar auf Ihr angegebenes Konto überweisen lassen, und zwar unsren Devisenbestimmungen entsprechend in der Zusammenstellung 4 + 4 + 2 von mir, meiner Frau und Herglotz.[1] Haben Sie nochmals recht herzlichen Dank für die Mühe, die Sie sich für uns Göttinger gegeben haben.

Von Richard Brauer habe ich ausführlich gehört. Hier haben alle früheren Bekannten Emmy Noethers herzlich Anteil genommen.

Mit herzlichen Grüssen und besten Wünschen für Ihren Ferienaufenthalt in der Schweiz

Ihr H. Hasse

Anmerkungen zum Dokument vom 20.5.1935

[1]Es handelt sich um den Ersatz der Auslagen, die Hermann Weyl für den Kranz der Göttinger Mathematiker am Sarg Emmy Noethers gehabt hatte. Vgl. Weyl's Brief vom 30. 4. 1935.

90 02.10.1935, Fritz Noether an Hasse

F. Noether.

Tomsk, den 2. Oktober 1935
Spasskaja 43.

Lieber Herr Hasse!

R. Brauer schrieb mir, daß er Ihnen zwei Manuskripte meiner Schwester geschickt habe, von denen vermutlich eines zur Veröffentlichung in Betracht käme. Da Sie sich freundlicher Weise erboten haben, sich bei der Durchsicht des Nachlasses zu beteiligen, so möchte ich Ihnen auch ganz freie Hand lassen, nach Ihrer Meinung über die Form der Veröffentlichung zu entscheiden, in Verbindung mit der Annalen–Redaktion oder einer anderen Zeitschrift.

Brauer wunderte sich, daß sich in den sonstigen hinterlassenen Papieren keine Notizen aus früherer Zeit, als der Übersiedlung nach Bryn–Mawr, mehr vorfanden. Wahrscheinlich hat sie selbst solche Notizen nicht mehr für wichtig angesehen

und bei der Übersiedlung vernichtet.[1] Ich glaube nicht, daß sie in Göttingen noch Papiere zurückgelassen hat; wenn doch, so bestände wohl nur die Möglichkeit, daß sich diese in den Möbelstücken befänden, die wir Frau Bruns, Friedenstr. 1, überlassen haben. Um sicher zu sein, wäre ja für alle Fälle eine Anfrage Ihrerseits dort möglich, aber wie gesagt glaube ich nicht, daß noch etwas da sein wird.

Mit nochmaligem bestem Dank für Ihre Bemühungen und freundlichen Grüßen, sowie Empfehlungen an Ihre Frau Gemahlin,

Ihr ergebener

F. Noether.[2]

Anmerkungen zum Dokument vom 2.10.1935

[1]Hiernach besteht wohl kaum eine Aussicht, die Briefe von Hasse an Emmy Noether, die verschollen sind, noch aufzufinden.

[2]Etwa einen Monat vorher, am 5. September 1935, hatte Fritz Noether als Ehrengast an einer Veranstaltung in Moskau teilgenommen, die die Moskauer Mathematische Gesellschaft zum Andenken an Emmy Noether durchführte. Vgl. [Sch91]. Auf dieser Veranstaltung hielt Paul Alexandroff als Präsident der Gesellschaft seine berühmt gewordene Gedenkrede auf Emmy Noether; die Rede ist in den „Gesammelten Abhandlungen" von Emmy Noether abgedruckt. Siehe [Ale83].

---

91 17.10.1935, Hasse an Fritz Noether

17. Oktober 1935.

Prof. Dr. H. Hasse.

Herrn
Prof. Dr. F. Noether
Tomsk (Sib.)USSR
Spasskaja 43

Lieber Herr Noether!

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief. Von R. Brauer habe ich in der Tat vor einiger Zeit 2 Manuskripte Ihrer Schwester erhalten. Bei dem einen handelt es sich um eine bereits etwa 1926 entstandene Untersuchung über Idealdifferentiationen und Differente, bei der zwei Manuskripte mit verschiedenen Notizen zur Umarbeitung vorliegen. Ich will Deuring, der mit dem Inhalt der Arbeit und den Umarbeitungsabsichten Ihrer Schwester genau vertraut ist, bitten, die Redaktion zur Veröffentlichung zu übernehmen.[1] Deuring kommt zum Wintersemester hierher. Das zweite Manuskript ist eine Ausarbeitung für ein Seminar über Klassenkörpertheorie in Bryn Mawr. Von dem Inhalt kommt eigentlich nichts für die Veröffentlichung in Frage, da die Abweichung von der vorhandenen Literatur unerheblich ist, höchstens eine Kleinigkeit über den Diskriminantensatz, die aber schon seit längerer Zeit auch von Artin, Grell und mir je unabhängig gefunden wurde.[2] Vielleicht werde ich die Gelegenheit benutzen, um diese noch nirgends publizierte Untersuchung aus der algebraischen Zahlentheorie, als aus dem Nachlass Ihrer

Schwester stammend, zu veröffentlichen. Für das erste Manuskript scheinen mir die Math. Ann. der gegebene Ort.

Ich bin noch nicht dazu gekommen bei Frau Bruns nach etwa noch vorhandenen weiteren Papieren nachzufragen, werde es aber in der nächsten Zeit tun und Ihnen Kenntnis geben, falls sich noch etwas finden sollte. – Gesprächsweise hörte ich von dem weiteren schweren Schlag, der Sie getroffen hat. Gestatten Sie mir, dass ich Ihnen meine herzliche Teilnahme ausspreche.

Mit freundlichem Gruss Ihr sehr ergebener H. Hasse

Anmerkungen zum Dokument vom 17.10.1935

[1] Die Arbeit wurde jedoch erst 15 Jahre später im Crelleschen Journal publiziert: [Noe50].
[2] Dazu vgl. Brief vom 12.8.1929.

---

92 08.01.1936, Hasse an Fritz Noether

Prof. Dr. H. H a s s e . Göttingen, den 8. Januar 1936.
Bunsenstr. 3–5

Herrn Prof. Dr. F. Noether

Tomsk (Sib.)USSR
Spasskaja 43

Sehr verehrter Herr Kollege!

Mit gleicher Post sende ich Ihnen einen Teil des Materials aus dem Nachlass Ihrer Schwester zurück, nämlich die Aufzeichnungen, die sie für ein Seminar über Klassenkörpertheorie in Bryn Mawr gemacht hatte. Deuring hat diese Aufzeichnungen durchgesehen. Er ist mit R. Brauer und mir der Ansicht, dass davon nichts zur Veröffentlichung in Frage kommt, auch nicht der neue Beweis des Dedekindschen Diskriminantensatzes, da dieser ja schon in ihrer Arbeit im Crelle 157 im wesentlichen erschienen ist.[1]

Das andere nachgelassene Manuskript Ihrer Schwester (Ideal–Differentiation) bereitet Deuring für den Druck vor.[2]

Mit herzlichen Grüssen
Ihr sehr ergebener

H. Hasse

Anmerkungen zum Dokument vom 8.1.1936

[1]Es handelt sich um die Arbeit [Noe27].

[2]Wir wissen nicht, was aus dem von Deuring für den Druck vorbereiteten Manuskript geworden ist. Der späteren Publikation [Noe50] lag offenbar ein anderes Exemplar zugrunde, das von H.Grell zur Verfügung gestellt wurde. Möglicherweise wurde das von Deuring bearbeitete Manuskript den Mathematischen Annalen vorgelegt, aber dort nicht akzeptiert. Es könnte aber auch sein, dass Deuring vorhatte, das unvollendet gebliebene Manuskript noch zu vervollständigen, dass er aber dann nicht dazu gekommen ist.

---

93 11.02.1936, Fritz Noether an Hasse, Postkarte

Tomsk, 11. Febr 1936

Sehr geehrter Herr Kollege!

Haben Sie vielen Dank für Ihre Bemühungen um die hinterlassenen Papiere meiner Schwester, sowie Ihren Brief vom 8. Jan.[1] Daß ich so spät antworte, kommt daher, daß das Manuskript erst vor kurzem hier eingegangen ist, da es offenbar nocheinmal durchgesehen worden ist.

Mit freundlichen Grüßen,
Ihr ergebener

F. Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 11.2.1936

[1]Zusammen mit dem Brief vom 8. Januar 1936 hatte Hasse ein Manuskript Emmy Noethers geschickt, das, wie er schreibt, nicht zur Publikation geeignet sei.

94 08.02.1937, Hasse an Fritz Noether

8. II. 37 [1]

Prof. Dr. H. Hasse

Herrn Prof. Dr. F. Noether

T o m s k USSR

Spasskaja 43

Sehr geehrter Herr Kollege Noether,

von Bryn Mawr College erhielt ich eine Sendung von Büchern aus dem Nachlaß Ihrer verstorbenen Schwester, die mir wie ich sehe in Ihrem Auftrage überlassen werden. Ich möchte Ihnen recht herzlich für diese Freundlichkeit danken.[2]

Mit ergebenstem Gruß

Ihr
H. Hasse

Anmerkungen zum Dokument vom 8.2.1937

[1]Seit dem letzten Brief Hasses an Fritz Noether ist ein Jahr vergangen. Inzwischen hatten sich wohl beide im September 1936 in Oslo auf dem Kongress der Internationalen Mathematischen Union (IMU) getroffen. Hasse war dort zu einem der Hauptvorträge eingeladen worden; siehe [Has37]. Die Teilnahme Fritz Noethers an dem Kongress in Oslo wird bei [Sch91] erwähnt. Vgl. dazu [Noe37].

[2]Die Bücher waren nicht für Hasse selbst bestimmt, sondern für den Freundeskreis Noethers in Deutschland. Siehe den folgenden Brief vom 22. 2. 1937.

95 22.02.1937, Fritz Noether an Hasse

Forschungsinstitut
FÜR MATHEMATIK UND MECHANIK
an der Kujbyscheff-Universität. Tomsk

F. Noether, Tomsk, den 22. 2. 1937.
Spasskaja 43.

Sehr geehrter Herr Kollege Hasse!

Ich erhielt Ihr Schreiben vom 8. Februar, in dem Sie die Zusendung einiger Bücher durch das Bryn–Mawr College erwähnen. Es scheint mir hiernach, daß das College vergessen hat, Ihnen genaueres über die Bestimmung der Bücher mitzuteilen. Die Übersendung entspricht einer hinterlassenen Bestimmung meiner Schwester, daß einigen ihrer früheren mathematischen Freunde Andenken aus ihrer Bibliothek überlassen werden sollten. Das College habe ich beauftragt, diese Bücher zur Weiterverteilung an die betreffenden Herren, deren genauere Adresse uns nicht bekannt ist, zunächst an Ihr Institut zu schicken; aber es scheint, daß Sie diese nähere Mitteilung nicht erhalten haben.

Ich bitte Sie aber doch, die entsprechende weitere Verteilung zu veranlassen. Es waren bestimmt:

1. Für Sie selbst: N. H. Abel, Oeuvres completes;
2. für Van der Waerden, Leipzig: A. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie;
3. für M. Deuring, Leipzig: Galois, Oeuvres;
4. für F. K. Schmidt, Erlangen: Steinitz, Algebraische Theorie der Körper;
5. für Dr. Magnus, Frankfurt a. M.: Ritt, Differential equations from the algebraic standpoint;
6. für Dr. Köthe, Münster: Schreier–Sperner, Vorlesungen über Matrizen;
7. für Krull, Erlangen: Bell, Algebraic arithmetic;
8. für Dr. Grell, Halle: Koenig, Einleitung in die allg. Theorie der algebraischen Größen.

Entschuldigen Sie bitte, daß ich Sie hiermit nun bemühe; aber die Nachlaßregelung war ohnehin unter den gegebenen Umständen sehr schwierig, und ich habe daher keinen anderen Weg gesehen, um diesem Wunsch meiner Schwester zu entsprechen.[1]

Mit besten Grüßen, Ihr ergebener

F. Noether.

Anmerkungen zum Dokument vom 22.2.1937

[1] Vgl. dazu den nachfolgenden Brief Hasses an Fritz Noether vom 8. 3. 1937.

---

96 08.03.1937, Hasse an Fritz Noether

8. 3. 37

Prof. Dr. H. Hasse

Herrn Prof. Dr. Noether[1]
Tomsk, USSR
Spasskaja 43

Sehr geehrter Herr Kollege Noether,

verbindlichsten Dank für Ihr freundliches Schreiben vom 22. 2. Die von Ihnen angegebene Verteilung der Bücher aus dem Nachlass Ihrer verstorbenen Schwester werde ich gleich in die Wege leiten. Ich habe tatsächlich von Amerika aus keine derartige Anweisung erhalten.

Mit besten Grüssen

Ihr sehr ergebener

H. Hasse

Anmerkungen zum Dokument vom 8.3.1937

[1] Acht Monate später, am 22. November 1937, wurde Fritz Noether von den sowjetischen Behörden verhaftet und schliesslich unter dem Vorwand, er sei ein deutscher Spion, zu 25 Jahren Gefängnis verurteilt. Im Jahre 1941 wurde er zum Tode verurteilt und sofort hingerichtet. Über das tragische Schicksal Fritz Noethers siehe [Sch91].

Namenverzeichnis

Stichwortverzeichnis

Literaturverzeichnis

[AH32] A. A. Albert and H. Hasse. A determination of all normal division algebras over an algebraic number field. *Trans. Am. Math. Soc.*, 34:722–726, 1932. 138

[AH35] P. Alexandroff and H. Hopf. *Topologie. Bd. 1. Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie. Topologie der Komplexe. Topologische Invarianzsätze und anschliessende Begriffsbildungen. Verschlingung im n–dimensionalen euklidischen Raum. Stetige Abbildungen von Polyedern.* Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgebiete. 45. Springer, Berlin, 1935. XIII, 636 S., 39 Abb. 93

[Alb29] A. A. Albert. A determination of all normal division algebras in sixteen units. *Trans. Am. Math. Soc.*, 31:253–260, 1929. 100

[Alb30a] A. A. Albert. A construction of all non–commutative rational division algebras of order eight. *Ann. Math. (2)*, 31:567–576, 1930. 100

[Alb30b] A. A. Albert. New results in the theory of normal division algebras. *Trans. Am. Math. Soc.*, 32:171–195, 1930. 100, 103

[Alb31a] A. A. Albert. On direct products. *Trans. Am. Math. Soc.*, 33:690–711, 1931. 103, 131, 138

[Alb31b] A. A. Albert. On direct products, cyclic division algebras, and pure Riemann matrices. *Trans. Am. Math. Soc.*, 33:219–234, Correction p.999, 1931. Remark: This paper has not been included into the “Collected Papers” of A. A. Albert. 131

[Alb31c] A. A. Albert. The structure of pure Riemann matrices with non-commutative multiplication algebras. *Rend. Circ. Mat. Palermo, II.Ser.*, 55:57–115, 1931. 113

[Alb32] A. A. Albert. On the construction of cyclic algebras with a given exponent. *Am. J. Math.*, 54:1–13, 1932. 155

[Alb34] A. A. Albert. On the construction of Riemann matrices. I. *Ann. Math. (2)*, 35:1–28, 1934. 208

[Alb37] A. A. Albert. *Modern higher algebra.* Univ. of Chicago Press, Chicago, 1937. XIV. 319 p. 205

[Alb05] N.E. Albert. *A^3 & his algebra. How a boy from Chicago's West Side became a force in American Mathematics.* iUniverse, 2005. XIV, 349 S. 267

[Ale83] P. Alexandroff. In Memory of Emmy Noether. In N. Jacobson, editor, *Emmy Noether, Collected Papers*, pages 1–11. Springer, 1983. VIII, 777 S. 234

[Arc28] R. G. Archibald. Diophantine equations in division algebras. *Trans. Am. Math. Soc.*, 30:819–837, 1928. 100

[Art24a] E. Artin. Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen I. (Arithmetischer Teil.). *Math. Z.*, 19:153–206, 1924. 185

[Art24b] E. Artin. Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen II. (Analytischer Teil.). *Math. Z.*, 19:207–246, 1924. 185

[Art28a] E. Artin. Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 5:261–289, 1928. 87, 105

[Art28b] E. Artin. Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 5:251–260, 1928. 105

[Art31] E. Artin. Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 164:1–11, 1931. 161

[AT90] E. Artin and J. Tate. *Class field theory.* Advanced Book Classics. Addison–Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City, CA., second edition, 1990. xxxviii, 259 p. 63

[AvdW26] E. Artin and B. L. van der Waerden. Die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen. *Nachrichten Göttingen*, pages 23–27, 1926. 61, 85

[AW45] E. Artin and G. Whaples. Axiomatic characterization of fields by the product formula. *Bull. Am. Math. Soc.*, 51:469–492, 1945. 63

[BHN32] R. Brauer, H. Hasse, and E. Noether. Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. *J. Reine Angew. Math.*, 167:399–404, 1932. 77, 96, 103, 112, 129, 131, 137, 138, 146, 147, 154, 160, 162, 171, 187

[BN27] R. Brauer and E. Noether. Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen. *Sitzungsberichte Akad. Berlin*, 1927:221–228, 1927. 77, 78, 80, 81, 85, 105

[Bra26] R. Brauer. Über Zusammenhänge zwischen arithmetischen und invariantentheoretischen eigenschaften von gruppen linearer substitutionen. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1926:410–416, 1926. 113, 123

[Bra28a] H. Brandt. Idealtheorie in einer Dedekindschen algebra. *Jahresbericht D. M. V.*, 37, 2.Abt.:5–7, 1928. 155

[Bra28b] R. Brauer. Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von gruppen linearer substitutionen. *Math. Z.*, 28:677–696, 1928. 155, 168

[Bra29] R. Brauer. Über Systeme hyperkomplexer Zahlen. *Math. Z.*, 30:79–107, 1929. 128, 129

[Bra30] R. Brauer. Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen. II. *Math. Z.*, 31:733–747, 1930. 103

[Bra32a] R. Brauer. Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern. *J. Reine Angew. Math.*, 166:241–252, 1932. 129, 146, 149

[Bra32b] R. Brauer. Über die Konstruktion der Schiefkörper, die von endlichem Rang in bezug auf ein gegebenes Zentrum sind. *J. Reine Angew. Math.*, 168:44–64, 1932. 129, 222

[BW35] R. Brauer and H. Weyl. Spinors in n dimensions. *Amer. Journ. of Math.*, 1935:425–449, 1935. 222

[Che32] C. Chevalley. La structure de la théorie du corps de classes. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 194:766–769, 1932. 194

[Che33a] C. Chevalley. La théorie du symbole de restes normiques. *J. Reine Angew. Math.*, 169:140–157, 1933. 96, 137, 160, 165, 166, 168, 170, 177, 179

[Che33b] C. Chevalley. Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I 2:365–476, 1933. 157, 193, 206

[Che34] C. Chevalley. Sur certains ideaux d'une algèbre simple. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 10:83–105, 1934. 172, 173, 175, 185

[Che35] C. Chevalley. Sur la théorie du corps de classes. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 201:632–634, 1935. 194, 220

[Che36] C. Chevalley. *L'arithmétique dans les algèbres de matrices.* Hermann & Cie., Paris, 1936. 35 p. 216

[CN35] C. Chevalley and H. Nehrkorn. Sur les démonstrations arithmétiques dans la théorie du corps de classes. *Math. Ann.*, 111:364–371, 1935. 93, 220

[Coh78] H. Cohn. *A classical invitation to algebraic numbers and class fields. With two appendices by Olga Taussky: "Artin's 1932 Göttingen lectures on class field theory" and "Connections between algebraic number theory and integral matrices."*. Universitext. Springer–Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1978. XIII, 328 p. 149

[Cur99] C. Curtis. *Pioneers of representation theory: Frobenius, Burnside, Schur and Brauer.* History of Mathematics. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1999. XVI, 287 p. 103

[Ded95] R. Dedekind. Ueber eine Erweiterung des Symbols $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ in der Theorie der Moduln. *Nachrichten Göttingen*, pages 183–208, 1895. 96

[Ded32] R. Dedekind. *Gesammelte mathematische Werke. Hrsg. v. Robert Fricke, Emmy Noether u. Öystein Ore. Bd.1-3.* Friedr. Vieweg & Sohn A.–G., Braunschweig, 1930-1932. 397/442/508 S. 60, 90, 96, 98, 152, 189

[Deu31a] M. Deuring. Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. *Math. Ann.*, 106:77–102, 1931. 94

[Deu31b] M. Deuring. Zur Theorie der Normen relativzyklischer Körper. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.–Phys. Kl. I*, pages 246–247, 1931. 97, 109, 137, 154

[Deu32] M. Deuring. Galoissche Theorie und Darstellungstheorie. *Math. Ann.*, 107:140–144, 1932. 120, 160, 223

[Deu33] M. Deuring. Imaginäre quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl 1. *Math. Z.*, 37:405–415, 1933. 116

[Deu35a] M. Deuring. *Algebren.* Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgebiete. Julius Springer, Berlin, 1935. 143 S. 87, 127, 132, 138, 154, 155, 169, 177, 216, 218

[Deu35b] M. Deuring. Neuer Beweis des Bauerschen Satzes. *J. Reine Angew. Math.*, 173:1–4, 1935. 198, 201

[Deu35c] M. Deuring. Zetafunktionen quadratischer Formen. *J. Reine Angew. Math.*, 172:226–252, 1935. 187, 212

[Deu36] M. Deuring. Anwendungen der Darstellungen von Gruppen durch lineare Substitutionen auf die galoissche Theorie. *Math. Ann.*, 113:40–47, 1936. 108

[Deu49] M. Deuring. Algebraische Begründung der komplexen Multiplikation. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 16(1/2):32–47, 1949. 205

[DH34] H. Davenport and H. Hasse. Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen. *J. Reine Angew. Math.*, 172:151–182, 1934. 198, 201

[Dic27] L. E. Dickson. *Algebren und ihre Zahlentheorie. Mit einem Kapitel über Idealtheorie von A. Speiser.* Orell Füssli (Veröffentlichungen der Schweizer Math. Ges. Bd. 4), Zürich, 1927. Übersetzt von J.J. Burckhardt und E. Schubarth. 100, 105, 113

[Dic28] L. E. Dickson. New division algebras. *Bull. American Math. Soc.*, 34:555–560, 1928. 113, 123

[Dic70] A. Dick. *Emmy Noether 1882–1935.* Beiheft No. 13 zur Zeitschrift "Elemente der Mathematik". Birkhäuser–Verlag, 1970. English translation 1981 by H.I. Blocher. 102

[Fit32] H. Fitting. Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen. *Math. Ann.*, 107:514–542, 1932. 105

[FL05] M. Fontana and K. A. Loper. An historical overview of Kronecker function rings, Nagata rings, and related star and semistar operations. *Preprint*, 107, 2005. 61

[FR02] G. Frei and P. Roquette. Helmut Hasse in Halle. In Kurt Richter Manfred Göbel, Karin Richter, editor, *Reports on Didactics and History of Mathematics.*, volume 19, pages 83–98. Martin Luther Universität Halle-Wittenberg, Fachbereich Mathematik und Informatik, Halle, 2002.

[Fre85] G. Frei. Helmut Hasse (1898-1979). *Exp. Math.*, 3:55–69, 1985.

[Fri19] R. Fricke. *Lehrbuch der Differential– und Integralrechnung und ihrer Anwendungen. 1.Bd.: Differentialrechnung. 2.Bd.: Integralrechnung.* B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1918-1919. 399/413 S. 98

[Fro96] G. Frobenius. Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe. *Sitzungsberichte Akad. Berlin*, 1896:689–703, 1896. 74

[Frö83] A. Fröhlich. *Galois module structure of algebraic integers.* Springer, Berlin und Heidelberg, 1983. X u. 262 S. 116, 161, 177

[FS05] D. Fenster and J. Schwermer. A delicate collaboration: Adrian Albert and Helmut Hasse and the Principal Theorem in Division Algebras in the early 1930's. *Arch. History Exact Sci.*, 59:349–379, 2005. 103, 124, 138

[Fur29] Ph. Furtwängler. Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 7:14–36, 1929. 101, 108, 214

[Gau00] C.F. Gauss. Zwei Notizen über die Auflösung der Kongruenz $xx + yy + zz \equiv 0 \bmod p$. In Gesellsch. d. Wiss. Göttingen, editor, *Gauß Werke VIII, Arithmetik und Algebra, Nachträge.*, pages 3–4. Teubner, Leipzig, 1900. 78

[Gey66] W-D. Geyer. Ein algebraischer Beweis des Satzes von Weichold über reelle Funktionenkörper. In H. Hasse and P. Roquette, editors, *Algebraische Zahlentheorie.*, volume 2 of *Ber. Tagung math. Forschungsinst.*

Oberwolfach, pages 83–98, Mannheim, 1966. Bibliographisches Institut. 197

[Gey77] W-D. Geyer. Reelle algebraische Funktionen mit vorgegebenen Null- und Polstellen. *Manuscr. Math.*, 22:87–103, 1977. 197

[Gre27a] H. Grell. Beziehungen zwischen Idealen verschiedener Ringe. *Math. Ann.*, 97:490–523, 1927. 54

[Gre27b] H. Grell. Zur Theorie der Ordnungen in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern. *Math. Ann.*, 97:524–558, 1927. 62

[Gre30a] H. Grell. Zur Normentheorie in hyperkomplexen Systemen. *J. Reine Angew. Math.*, 162:60–62, 1930. 53

[Gre30b] H. Grell. Zur Verzweigungstheorie in maximalen Ordnungen Dedekindscher hyperkomplexer Systeme und in allgemeinen Ordnungen algebraischer zahl- und funktionenkörper. *Jahresbericht D. M. V.*, 39(2.Abteilung):17–18, 1930. 53, 86

[Gre35] H. Grell. Über die Gültigkeit der gewöhnlichen Idealtheorie in endlichen algebraischen Erweiterungen erster und zweiter Art. *Math. Z.*, 40:503–505, 1935. 85

[Gre36] H. Grell. Verzweigungstheorie in allgemeinen Ordnungen algebraischer Zahlkörper. *Math. Z.*, 40:629–657, 1936. 53, 86

[Gru32] W. Grunwald. Charakterisierung des Normenrestsymbols durch die $\wp$–Stetigkeit, den vorderen Zerlegungssatz und die Produktformel. *Math. Ann.*, 107:145–164, 1932. 172

[Gru33] W. Grunwald. Ein allgemeines Existenztheorem für algebraische Zahlkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 169:103–107, 1933. 137, 172

[Has23] H. Hasse. Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen. *J. Reine Angew. Math.*, 152:129–148, 1923. 74, 78

[Has25] H. Hasse. Zwei Existenztheoreme über algebraische Zahlkörper. *Math. Ann.*, 95:229–238, 1925. 50

[Has26a] H. Hasse. Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. I: Klassenkörpertheorie. *Jahresbericht D. M. V.*, 35:1–55, 1926. 58, 92

[Has26b] H. Hasse. *Höhere Algebra. Bd. I: LLineare Gleichungen.*, volume 931 of *Sammlung Göschen.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1926. 160 S. 53

[Has26c] H. Hasse. Über die Einzigkeit der beiden Fundamentalsätze der elementaren Zahlentheorie. *J. Reine Angew. Math.*, 155:199–220, 1926. 63

[Has27a] H. Hasse. Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teil Ia: Beweise zu I. *Jahresbericht D. M. V.*, 36:233–311, 1927. 91, 160

[Has27b] H. Hasse. Existenz gewisser algebraischer Zahlkörper. *Sitzungsberichte Akad. Berlin*, 1927:229–234, 1927. 79, 81, 82, 85

[Has27c] H. Hasse. *Höhere Algebra. Bd. II: Gleichungen höheren Grades.*, volume 932 of *Sammlung Göschen.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1927. 160 S. 53, 55, 57

[Has27d] H. Hasse. Neue Begründung der komplexen Multiplikation I: Einordnung in die allgemeine Klassenkörpertheorie. *J. Reine Angew. Math.*, 157:115–139, 1927. 63, 185

[Has28] H. Hasse. Über eindeutige Zerlegung in Primelemente oder in Primhauptideale in Integritätsbereichen. *J. Reine Angew. Math.*, 159:3–12, 1928. 60, 61

[Has30a] H. Hasse. *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. II: Reziprozitätsgesetz.*, volume 6 of *Jahresbericht D. M. V., Ergänzungsband.* B. G. Teubner, 1930. IV + 204 S. 58, 74, 99, 106, 126, 127, 131

[Has30b] H. Hasse. Die moderne algebraische Methode. *Jahresbericht D. M. V.*, 31:22–34, 1930. 90

[Has30c] H. Hasse. Die Normenresttheorie relativ–Abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen. *J. Reine Angew. Math.*, 162:145–154, 1930. 63, 90, 96, 106

[Has31a] H. Hasse. Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestszmbol. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.–Phys. Kl. I*, pages 64–69, 1931. 131

[Has31b] H. Hasse. Neue Begründung der komplexen Multiplikation. II. Aufbau ohne Benutzung der allgemeinen Klassenkörpertheorie. *J. Reine Angew. Math.*, 165:64–88, 1931. 63, 185

[Has31c] H. Hasse. Theorie der zyklischen Algebren über einem algebraischen Zahlkörper. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.–Phys. Kl. I*, pages 70–79, 1931. 109

[Has31d] H. Hasse. Über $\wp$–adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme. *Math. Ann.*, 104:495–534, 1931. 87, 91, 95, 96, 103, 105, 109, 115, 116, 132, 137, 184, 197

[Has32a] H. Hasse. Additional note to the author's "Theory of cyclic alebras over an algebraic number field". *Trans. Am. Math. Soc.*, 34:727–730, 1932. 157

[Has32b] H. Hasse. Ansprache zum 70. geburtstag des Geh. regierungsrats prof. dr. kurt hensel am 29. dezember 1931. *Mitteilungen Universitätsbund Marburg*, 1932(Heft 1):1–6, 1932. 115

[Has32c] H. Hasse. Strukturtheorie der halbeinfachen Algebren über algebraischen Zahlkörpern. In *Verhandlungen KongreßZürich 1932.*, volume 2, pages 18–19. 1932. 132

[Has32d] H. Hasse. Theory of cyclic algebras over an algebraic number field. *Trans. Am. Math. Soc.*, 34:171–214, 1932. 100, 108, 109, 112, 113, 114, 124, 127, 134, 137, 157, 166

[Has32e] H. Hasse. Zu Hilberts algebraisch–zahlentheoretischen Arbeiten. In D. Hilbert, editor, *Gesammelte Abhandlungen.*, volume 1, pages 528–535. J. Springer, Berlin, 1932. 152

[Has32f] H. Hasse. Zwei Bemerkungen zu der Arbeit "Zur Arithmetik der Polynome" von U. Wegner. *Math. Ann.*, 106:455–456, 1932. 98

[Has33a] H. Hasse. Beweis des Analogons der Riemannschen Vermutung für die Artinschen und F. K. Schmidtschen Kongruenzzetafunktionen in gewissen elliptischen fällen. Vorläufige Mitteilung. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.–Phys. Kl. I*, 1933(42):253–262, 1933. 208

[Has33b] H. Hasse. Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper. Insbesondere Begründung der Theorie des Normenrestsymbols und Herleitung des Reziprozitätsgesetzes mit nichtkommutativen Hilfsmitteln. *Math. Ann.*, 107:731–760, 1933. 91, 103, 109, 112, 133, 137, 138, 147, 154, 157, 160, 162, 165, 166, 170, 171, 172, 177, 192, 193, 197, 198, 216

[Has33c] H. Hasse. Explizite Konstruktion zyklischer Klassenkörper. *Math. Ann.*, 109:191–195, 1933. 186, 205

[Has33d] H. Hasse. Vorlesungen über Klassenkörpertheorie. Preprint, Marburg. [Later published in book form by Physica Verlag Würzburg (1967)], 1933. 157, 160, 162, 178, 187, 189, 191, 193, 194, 206, 219

[Has34a] H. Hasse. Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 10:325–348, 1934. 208

[Has34b] H. Hasse. Normenresttheorie galoisscher Zahlkörper mit Anwendungen auf Führer und Diskriminante abelscher Zahlkörper. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I vol. 2, Part 10:477–498, 1934. 157

[Has34c] H. Hasse. Theorie der relativ–zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 172:37–54, 1934. 197

[Has34d] H. Hasse. Über gewisse Ideale in einer einfachen Algebra (Exposés mathématiques I.). *Actual. Sci. Ind.*, 1934(109):12–16, 1934. 172, 173, 175, 186, 216

[Has37] H. Hasse. Über die Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. In *C. R. du Congrès Internat. Math. Oslo 1936.*, volume 1, pages 189–206. 1937. 237

[Has49] H. Hasse. *Zahlentheorie.* Akademie–Verlag, Berlin, 1949. XII, 468 S. 107

[Has50a] H. Hasse. Invariante Kennzeichnung galoisscher Körper mit vorgegebener Galoisgruppe. *Arch. Math.*, 2:281–294, 1950. 108

[Has50b] H. Hasse. Zum Existenzsatz von Grunwald in der Klassenkörpertheorie. *J. Reine Angew. Math.*, 188:40–64, 1950. 172

[Has50c] H. Hasse. Zur Frage der Zerfällungskörper des Gruppenrings einer endlichen Gruppe. *Math. Nachr.*, 3:4–6, 1950. 132

[Has67] H. Hasse. *Vorlesungen über Klassenkörpertheorie.* Physica–Verlag, Würzburg, 1967. 275 S. 178, 194

[Hau29] O. Haupt. *Einführung in die Algebra I, II.* B. G. Teubner, 1929. 58

[Hec23] E. Hecke. *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen.* Akad. Verlagsges., Leipzig, 1923. VIII u. 265 S. 205

[Hee86] H. Heesch. *Gesammelte Abhandlungen.* Franzbecker, Bad Salzdetfurth, 1986. XXII u. 401 S. 229

[Hen87] K. Hensel. Untersuchung der ganzen algebraischen Zahlen eines gegebenen Gattungsbereiches für einen beliebigen algebraischen Primdivisor. *J. Reine Angew. Math.*, 101:99–141, 1887. 161

[Hen27] K. Hensel. Über eindeutige Zerlegung in Primelemente. *J. Reine Angew. Math.*, 158:195–198, 1927. 61

[Her31] J. Herbrand. Sur les unites d'un corps algébrique. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 192:24–27, 1931. 106

[Her35] J. Herbrand. *Le développement moderne de la théorie des corps algébriques; corps de classes et lois de reciprocite.* Mem. Sci. Math. 75. Gauthier–Villars, Paris, 1935. 72 p. 177

[Hey29] K. Hey. *Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen.* Dissertation, Hamburg, 1929. 49 p. 118, 191, 198, 216

[Hil97] D. Hilbert. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, 4:I–XVIII u. 175–546, 1897. 58, 127, 132

[Hil32] D. Hilbert. *Gesammelte Abhandlungen. Bd. 1. Zahlentheorie.* Julius Springer, Berlin, 1932. XIV, 539 S. 151, 178

[Hil33] D. Hilbert. *Gesammelte Abhandlungen. Bd. 2. Algebra. – Invariantentheorie. – Geometrie.* Julius Springer, Berlin, 1933. VIII, 453 S., 12 Abb. 178

[Hil35] D. Hilbert. *Gesammelte Abhandlungen. Bd. 3. Analysis. – Grundlagen der Mathematik. – Physik. – Verschiedenes. Nebst einer Lebensgeschichte.* Julius Springer, Berlin, 1935. VII, 435 S., 12 Fig. 178

[Iya34] S. Iyanaga. Zum Beweise des Hauptidealsatzes. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 10:349–357, 1934. 108, 214, 216

[Jen86] W. Jentsch. Auszüge aus einer unveröffentlichten Korrespondenz von Emmy Noether und Hermann Weyl mit Heinrich Brandt. *Historia Math.*, 13:5–12, 1986. 167

[Ker00] I. Kersten. Biography of Ernst Witt. *Contemp. Math.*, 272:155–171, 2000. 189, 198

[Kne87] M. Kneser. Max Deuring 9.12.1907 - 20.12.1984. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 89:135–143, 1987. 95

[Kor36] A. Korselt. Vollständige Lösung einer neuen diophantischen Aufgabe. *Math. Ann.*, 112:395–410, 1936. 118

[Köt30] G. Köthe. Abstrakte Theorie nichtkommutativer Ringe mit einer Anwendung auf die Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen. *Math. Ann.*, 103:545–572, 1930. 95

[Köt31] G. Köthe. Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum. *Math. Ann.*, 105:15–39, 1931. 103

[Köt33] G. Köthe. Erweiterung des Zentrums einfacher Algebren. *Math. Ann.*, 107:761–766, 1933. 160, 162

[Kru24] W. Krull. Algebraische Theorie der zerlegbaren Ringe. (Algebraische Theorie der Ringe III.). *Math. Ann.*, 92:183–213, 1924. 50

[Kru28] W. Krull. Zur Theorie der allgemeinen Zahlringe. *Math. Ann.*, 99:51–70, 1928. 54

[Kru31] W. Krull. Über die Zerlegung der Hauptideale in allgemeinen Ringen. *Math. Ann.*, 105:1–14, 1931. 61, 98

[Kru35] W. Krull. *Idealtheorie.* Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgebiete. Julius Springer, Berlin, 1935. V, 172 S. 50

[KT55] Y. Kawada and J. Tate. On the Galois cohomology of unramified extensions of function fields in one variable. *Am. J. Math.*, 77:197–217, 1955. 94

[Lem00] F. Lemmermeyer. *Reciprocity Laws. From Euler to Eisenstein.* Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000. XIX, 487 p.

[Leo73] H.-W. Leopoldt. Zum wissenschaftlichen Werk von Helmut Hasse. *J. Reine Angew. Math.*, 262/263:1–17, 1973.

[Leo82] H.-W. Leopoldt. Obituary. Helmut Hasse (August 25, 1898 - December 26, 1979). *J. Number Theory*, 14:118–120, 1982.

[Lev29] J. Levitzki. Über vollständig reduzible Ringe und Unterringe. *Nachrichten Göttingen*, 1929:240–244, 1929. 87

[Lev31a] J. Levitzki. A Galois theory in semi-simple rings. *Bulletin A.M.S.*, 37:44, 1931. 87

[Lev31b] J. Levitzki. Über vollständig reduzible Ringe und Unterringe. *Math. Z.*, 33:663–691, 1931. 87, 118

[Lev32] J. Levitzki. On normal products of algebras. *Ann. Math. (2)*, 33:377–402, 1932. 118

[Lor70] F. Lorenz. *Quadratische Formen über Körpern.* Lecture Notes in Mathematics. 130. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970. I, 77 S. 78

[Lor99] F. Lorenz. Nachrichten von Büchern und Menschen: Chiungtze C. Tsen. *Sitz.ber. Math.-Nat. Kl. Akad. gemeinnütz. Wiss. Erfurt*, 9:1–25, 1999. 193

[Lor05] F. Lorenz. Kaete Hey and the Main Theorem in the theory of algebras. In W. Więsław, editor, *European Mathematics in the last centuries.*, pages 57–76, Wrocław, 2005. Stefan Banach International Mathematical Center, Institute of Mathematics Wrocław University. 118

[Mad66] M. Madan. On the Galois cohomology of tamely ramified fields of algebraic functions. *Arch. Math.*, 17:400–408, 1966. 94

[Mag34] W. Magnus. Über den Beweis des Hauptidealsatzes. *J. Reine Angew. Math.*, 170:235–240, 1934. 214

[ML05] S. Mac Lane. *A Mathematical Autobiography.* Karl Peters, Wellesley MD, 2005. XV, 358 S. 114

[Neu86] J. Neukirch. *Class field theory.* Grundlehren d. math. Wissensch. 280. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1986. VIII, 140 S. 63

[Noe08] E. Noether. Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form. *J. Reine Angew. Math.*, 134:23–90, 1908. 159

[Noe21] E. Noether. Idealtheorie in Ringbereichen. *Math. Ann.*, 83:24–66, 1921. 53

[Noe25] E. Noether. Abstrakter Aufbau der Idealtheorie im algebraischen zahlkörper. *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, 33, Abt.2:102, 1925. 49

[Noe26a] E. Noether. Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl– und Funktionenkörpern. *Math. Ann.*, 96:26–61, 1926. 49, 54, 61, 62, 99

[Noe26b] E. Noether. Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik p. *Nachrichten Göttingen*, 1926:28–35, 1926. 61

[Noe26c] E. Noether. Gruppencharaktere und Idealtheorie. *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, 34, Abt.2:144, 1926. 52, 69

[Noe27] E. Noether. Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl– oder Funktionenkörpers. *J. Reine Angew. Math.*, 157:82–104, 1927. 52, 53, 54, 80, 87, 236

[Noe29] E. Noether. Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. *Math. Z.*, 30:641–692, 1929. 69, 86, 91, 105

[Noe32a] E. Noether. Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und Zahlentheorie. *Verhandl. Intern. Math. Kongreß Zürich*, 1:189–194, 1932. 92, 137, 161, 166, 170

[Noe32b] E. Noether. Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung. *J. Reine Angew. Math.*, 167:147–152, 1932. 97, 115, 120, 121, 124, 161, 177, 223

[Noe33a] E. Noether. Der Hauptgeschlechtssatz für relativ–galoissche Zahlkörper. *Math. Ann.*, 108:411–419, 1933. 92, 157, 177, 178, 189

[Noe33b] E. Noether. Nichtkommutative Algebra. *Math. Z.*, 37:514–541, 1933. 94, 113, 146, 148, 149, 169

[Noe34] E. Noether. Zerfallende verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen. (Exposés mathématiques IV.). *Actual. Sci. Ind.*, 1934(148):15 p., 1934. 139, 172, 173, 175, 186, 216

[Noe37] F. Noether. Über elektrische drahtwellen. In *C.R. Congr. Internat. Math., Oslo 1936.*, volume 2, pages 234–235, Oslo, 1937. International Mathematical Union. 237

[Noe50] E. Noether. Idealdifferentiation und Differente. *J. Reine Angew. Math.*, 188:1–21, 1950. 81, 90, 98, 177, 235, 236

[Noe83] E. Noether. Algebra der hyperkomplexen Größen. Vorlesung Wintersemester 1929/30, ausgearbeitet von M. Deuring. In N. Jacobson, editor, *Emmy Noether, Collected Papers*, pages 711–763. Springer, 1983. VIII, 777 S. 91, 93, 108, 113, 123, 137, 149

[Ost19] A. Ostrowski. Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. *Nachr. Göttinger Gesellsch. d. Wiss.*, 1919:279–298, 1919. 80

[Pet35] K. Petri. Über die Diskriminante ternärer Formen. *Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.–Naturwiss. Abt.*, 1935(3):471–484, 1935. 159

[Pfi65] A. Pfister. Zur Darstellung von -1 als Summe von Quadraten in einem Körper. *Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.–Naturwiss. Abt.*, 1965(40):159–165, 1965. 78

[Pie31a] S Pietrkowski. Theorie der unendlichen Abelschen Gruppen. *Math Ann.*, 104:535–569, 1931. 95

[Pie31b] S Pietrkowski. Untergruppen und Quotientengruppen unendlicher Abelscher Gruppen. *Math. Ann.*, 105:666–671, 1931. 95

[Prü25] H. Prüfer. Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie. *Math. Ann.*, 94:198–243, 1925. 95

[Rau28a] H. Rauter. Bemerkung zu der Arbeit: "Studien zur Theorie des Galoisschen Körpers...". *J. Reine Angew. Math.*, 159:228, 1928. 85

[Rau28b] H. Rauter. Studien zur Theorie des Galoisschen Körpers über dem Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten t mit Koeffizienten aus einem beliebigen endlichen Körper von p^{m_0} Elementen. *J. Reine Angew. Math.*, 159:117–132, 1928. 80, 85

[Rei33] H. Reichardt. Arithmetische Theorie der kubischen Körper als Radikalkörper. *Monatsh. Math. Phys.*, 40:323–350, 1933. 173

[Roq89] P. Roquette. Über die algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten von Max Deuring. *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, 91:109–125, 1989. 218

[Roq00] P. Roquette. On the history of Artin's L-functions and conductors. Seven letters from Artin to Hasse in the year 1930. *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, 19*:5–50, 2000. 97

[Roq01] P. Roquette. Class field theory in characteristic p, its origin and development. In Katsuya Miyake, editor, *Class field theory – its centenary and prospect. Proceedings of the 7th MSJ International Research Institute of the Mathematical Society of Japan, Tokyo, Japan, June 3–12, 1998*, volume 30 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 549–631, Tokyo, 2001. Mathematical Society of Japan. 62, 198, 210

[Roq02] P. Roquette. The Riemann hypothesis in characteristic p, its origin and development. Part 1. The formation of the zeta-functions of Artin and F. K. Schmidt. *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, 21/2:79–157, 2002.

[Roq04a] P. Roquette. *The Brauer-Hasse-Noether Theorem in historical perspective.*, volume 15 of *Schriftenreihe der Heidelberger Akademie der Wissenschaften*. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004. I, 77 S. 114, 137, 138

[Roq04b] P. Roquette. The Riemann hypothesis in characteristic p, its origin and development. Part 2. The first steps by Davenport and Hasse. *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, 22:1–69, 2004. 178, 180

[Sch06] I. Schur. Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen. *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1906:164–184, 1906. 132

[Sch28] F. K. Schmidt. Zur Zahlentheorie in Körpern von der Charakteristik p. *Sitzungsberichte Erlangen*, 58/59:159–172, 1928. 62

[Sch30] F. K. Schmidt. Zur Klassenkörpertheorie im Kleinen. *J. Reine Angew. Math.*, 162:155–168, 1930. 96

[Sch31a] F. K. Schmidt. Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p. *Math. Z.*, 33:1–32, 1931. 85, 185, 198

[Sch31b] F. K. Schmidt. Die Theorie der Klassenkörper über einem Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten und mit endlichem Koeffizientenbereich. *Sitzungsber. Physik.–Med. Soz. Erlangen*, 62:267–284, 1931. 197

[Sch35a] O. Schilling. Über gewisse Beziehungen zwischen der Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme und algebraischer Zahlkörper. *Math. Ann.*, 111:372–398, 1935. 216

[Sch35b] H. L. Schmid. Über das Reziprozitätsgesetz in relativ–zyklischen algebraischen Funktionenkörpern mit endlichem Konstantenkörper. *Math. Z.*, 40:91–109, 1935. 216

[Sch87] N. Schappacher. Das mathematische Institut der Universität Göttingen 1929–1950. In Heinrich Becker and andere, editors, *Die Universität Göttingen unter dem Nationalsozialismus.*, pages 345–373. K. G. Saur, 1987. 191

[Sch91] K. Schlote. Noether, F. – Opfer zweier Diktaturen. *NTM-Schriftenreihe*, 28:33–41, 1991. 234, 237, 239

[Seg03] S. L. Segal. *Mathematicians under the Nazis.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. xxii, 530 p. 210, 214

[Sho32] K. Shoda. Über die Galoissche Theorie der halbeinfachen hyperkomplexen Systeme. *Math. Ann.*, 107:252–258, 1932. 146

[Spe16] A. Speiser. Gruppendeterminante und Körperdiskriminante. *Math. Ann.*, 77:546–562, 1916. 120

[Spe19] A. Speiser. Zahlentheretische sätze aus der Gruppentheorie. *Math. Zeitschr.*, 5:1–6, 1919. 132

[Spe27] A. Speiser. *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Kristallographie.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungsgebiete Bd. 5. J. Springer, Berlin, second edition, 1927. IX + 251 S. mit 38 Abb. 92

[Sta36] R. Stauffer. The construction of a normal basis in a separable normal extension field. *Am. J. Math.*, 58:585–597, 1936. 223

[Ste10] E. Steinitz. Algebraische Theorie der Körper. *J. Reine Angew. Math.*, 137:167–309, 1910. 56, 58

[Ste30] E. Steinitz. *Algebraische Theorie der Körper. Neu herausgegeben, mit Erläuterungen und einem Anhang: Abriß der Galoisschen Theorie versehenen von R. Baer und H. Hasse.* de Gruyter–Verlag, Berlin, 1930. 150+27 S. 58

[Tat67] J. Tate. Fourier analysis in Number Fields and Hecke's zeta-functions. In J.W.S. Cassels and A. Fröhlich, editors, *Algebraic Number Theory.*, chapter XV, pages 305–364. Academic Press, New York, 1967. 184

[Tob03] R. Tobies. Briefe Emmy Noethers an P.S. Alexandroff. *NTM N.S.*, 11(2):100–115, 2003. 93, 106

[Toe49] O. Toeplitz. *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. Erster Band. Aus dem Nachlass herausgegeben von G. Köthe.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. LVI. Springer–Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1949. IX, 181 S., 148 Abb. 135

[Tol90] C. Tollmien. Sind wir doch der Meinung, daß ein weiblicher Kopf nur ganz ausnahmsweise in der Mathematik schöpferisch tätig sein kann. - Emmy Noether 1882-1935. In *Göttinger Jahrbuch.*, volume 38, pages 153–219. Erich Goltze, Göttingen, 1990. 188

[Tol91] C. Tollmien. Die Habilitation von Emmy Noether an der Universität Göttingen. *NTM Schriftenr. Gesch. Naturwiss. Tech. Med.*, 28(1):13–32, 1991.

[Tsc26] N. Tschebotareff. Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören. *Math. Ann.*, 95:191–228, 1926. 74

[Tse33] C. Tsen. Divisionsalgebren über Funktionenkörpern. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.–Phys. Kl. I*, 1933(44):335–339, 1933. 191, 193

[Tse34] C. Tsen. *Algebren über Funktionenkörpern.* Dissertation, Göttingen, 1934. 19 p. 193

[TT81] O. Taussky-Todd. My personal recollections of Emmy Noether. In J. W. Brewer and M. K. Smith, editors, *Emmy Noether. A tribute to her life and work.*, pages 79–92. M. Dekker, New York, 1981. 58, 108, 155, 178, 205, 214

[Ulm33] H. Ulm. Zur Theorie der abzählbar–unendlichen Abelschen Gruppen. *Math. Ann.*, 107:774–803, 1933. 219

[Ulm35] H. Ulm. Zur Theorie der nicht–abzählbaren primären abelschen Gruppen. *Math. Z.*, 40:205–207, 1935. 219

[vdW30] B. L. van der Waerden. *Moderne Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Bd. I.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete Bd. 23. Springer, Berlin, 1930. VIII + 243 S. 56, 58, 205

[vdW31] B. L. van der Waerden. *Moderne Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Bd. II.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete Bd. 24. Springer, Berlin, 1931. VII + 216 S. 87, 105

[vdW34] B. L. van der Waerden. Elementarer Beweis eines zahlentheoretischen Existenztheorems. *J. Reine Angew. Math.*, 171:1–3, 1934. 193

[vdW35] B. L. van der Waerden. Nachruf auf Emmy Noether. *Math. Ann.*, 111:469–476, 1935.

[vdW75] B. L. van der Waerden. On the sources of my book Moderne Algebra. *Historia Math.*, 2:11–40, 1975. 54

[vdW97] B. L. van der Waerden. Meine Göttinger Lehrjahre. *Mitt. Dtsch. Math.-Ver.*, 1997(2):20–27, 1997. 218

[Ven70] B.A. Venkov. *Elementary number theory.* Wolters–Noordhoff Series of Monographs and Textbooks on Pure and Applied Mathematics. Wolters–Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands, 1970. IX, 249 p. 175

[vN26] J. v. Neumann. Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen. *Acta Szeged*, 2:193–227, 1926. 95

[Vor35] W. Vorbeck. *Nichtgaloissche Zerfällungskörper einfacher hyperkomplexer Systeme.* PhD thesis, Universiät Göttingen, 1935. 113

[Wan48] S. Wang. A counter example to Grunwald's theorem. *Annals of Math.*, 49:1008–1009, 1948. 137, 172

[Wan50] S. Wang. On Grunwald's theorem. *Annals of Math.*, 51:471–484, 1950. 172

[Web12] H. Weber. *Lehrbuch der Algebra. Kleine Ausgabe in einem Bande.* Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1912. X, 528 p. 69

[Wed14] I. H. M. Wedderburn. A type of primitive algebra. *Trans. Am. Math. Soc.*, 15:162–166, 1914. 100

[Wei93] A. Weil. *Lehr- und Wanderjahre eines Mathematikers. Aus dem Französischen übersetzt von Theresia Übelhör.* Birkhäuser, Basel, 1993. 212 S. 83

[Wen31] B.A. Wenkov. Über die Klassenzahl positiver binärer quadratischer Formen. *Math. Z.*, 33:350–374, 1931. 175

[Wey35] H. Weyl. Emmy Noether. *Scripta math.*, 3:201–220, 1935. 76, 191, 232

[Wic36] W. Wichmann. Anwendungen der p-adischen Theorie im Nichtkommutativen. *Mh. Math. Phys.*, 44:203–224, 1936. 191

[Wit31] E. Witt. Über die Kommutativität endlicher Schiefkörper. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 8:413, 1931. 198

[Wit34a] E. Witt. Riemann–Rochscher Satz und ζ–Funktion im Hyperkomplexen. *Math. Ann.*, 110:12–28, 1934. 184, 198, 216

[Wit34b] E. Witt. Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz. *Math. Z.*, 39:462–467, 1934. 210

[Wit34c] E. Witt. Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate. Schiefkörper über rellem Funktionenkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 171:1–11, 1934. 197, 198

[Wit35a] E. Witt. Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 173:43–51, 1935. 221

[Wit35b] E. Witt. Zwei Regeln über verschränkte Produkte. *J. Reine Angew. Math.*, 173:191–192, 1935. 166

[Wit36] E. Witt. Bemerkungen zum Beweis des Hauptidealsatzes von S. Iyanaga. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 11:221, 1936. 216

[Wit37a] E. Witt. Schiefkörper über diskret bewerteten Körpern. *J. Reine Angew. Math.*, 176:153–156, 1937. 198

[Wit37b] E. Witt. Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. *J. Reine Angew. Math.*, 176:31–44, 1937. 222

[Wit37c] E. Witt. Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n. Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik p. *J. Reine Angew. Math.*, 176:126–140, 1937. 223

[Wit83] E. Witt. Vorstellungsbericht. *Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen.*, 1983:100–101, 1983. 184

[Wit98] E. Witt. *Collected papers – Gesammelte Abhandlungen. Ed. by Ina Kersten. With an essay by Günter Harder on Witt vectors.* Springer, Berlin, 1998. xvi, 420 S. 197, 198, 210

[Zas37] H. Zassenhaus. *Lehrbuch der Gruppentheorie. Bd. 1.*, volume 21 of *Hamburg. Math. Einzelschriften.* B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1937. VI, 152 S. 108

[Zor33] M. Zorn. Note zur analytischen hyperkomplexen Zahlentheorie. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 9:197–201, 1933. 118, 184, 191, 198, 216

Kurzbiographien

Die folgende Sammlung von Kurzbiographien soll die wichtigsten biographischen Daten zu den in den Briefen und Kommentaren erwähnten Personen bereitstellen. Wenn möglich wird jeweils auf ausführlichere Nachrufe etc. verwiesen.

Ackermann-Teubner, Alfred
War von 1903 bis 1919 Schatzmeister der DMV. 1912 stiftete er den nach ihm benannten Preis, der 1932 an Artin und Noether und davor u.a. an Zermelo ging.

1. F. Schulze, *B.G. Teubner, B. 1811-1911. Geschichte der Firma*, Leipzig 1911, 520 S

2. Math. Ann. 107, S. 803

Ahlfors, Lars Valerian (18.04.1907 Helsingfors – 11.10.1996, Pittsfield)
Ahlfors hatte 1933–1936 einen Lehrauftrag in Helsingfors, war von 1936 bis 1938 Professor in Harvard, danach bis 1944 in Helsingfors, und lehrte anschließend in Zürich und Harvard. Er erhielt 1936 auf dem ICM in Oslo die Fields Medaille. Er ist besonders bekannt für sein Lehrbuch über Funktionentheorie (Complex Analysis).

1. O. Lehto, *On the life and work of Lars Ahlfors*, Math. Intell. **20** (1998), no. 3, 4–8

Albert, A. Adrian (9. 11. 1905 Chicago, 6. 06. 1972 Chicago)
Studium an der Universität Chicago, Ph.D. 1928 bei Dickson: *Algebras and their Radicals and Division Algebras*. Danach war Albert von 1928 bis 1929 in Princeton, von 1929 bis 1931 in Columbia, ab 1931 assistant professor in Chicago.

1. N. Jacobson, *Abraham Adrian Albert 1905-1972*, Bull. Am. Math. Soc. **80**, 1075-1100 (1974)

2. D. Zelinsky, *A. A. Albert*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 661–665.

3. N. Albert, A^3 & *his algebra.* [Alb05].

Alexandroff, Paul (7. 05. 1896 Bogorodsk, 16. 11. 1982 Moskau)
(auch Pavel Sergeevich Aleksandrov). War ab 1921 Dozent, ab 1929 Professor an der Universität Moskau, und besuchte von 1923 bis 1932 jeden Sommer Göttingen.

1. L.C. Arboleda, *Les débuts de l'école topologique sovietique: Notes sur les lettres de Paul S. Alexandroff et Paul S. Urysohn à Maurice Frechet*, Arch. Hist. Exact Sci. **20** (1979), 73–89

2. A.V. Arkhangel'skij, A.A. Mal'tsev, O.A. Olejnik, *Pavel Sergeevich Aleksandrov*, Russ. Math. Surv. **31** (1976), 1–13

Amitsur, Shimshon Avraham (1921 – 5. 09. 1994, Jerusalem)
Promovierte 1948 bei Levitzky.

1. A. Mann et al. (ed.), *Selected papers of S.A. Amitsur with commentary*, American Mathematical Society, 2001.

2. *Amitsur's mathematics: an overview*, Ring theory 1989 (Ramat Gan and Jerusalem, 1988/1989), 1–11,

Archibald, Ralph
Schrieb seine Doktorarbeit *Diophantine Equations in Division Algebras* bei Dickson (Chicago 1927); die Publikation [*Diophantine equations in division algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), 819–837] wurde von Hasse für das Jahrbuch besprochen:

> „*Es handelt sich um diophantische Gleichungen, welche befriedigt werden müssen, um bei der Dicksonschen Konstruktion von Divisionsalgebren der Ordnung 16 die Assoziativität zu sichern. Verf. gibt aus der Theorie der quadratischen Formen fliessende notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingungen und konstruiert Beispiele.*“

Archibald schrieb 1970 ein Buch *Introduction to the theory of numbers.*

Artin, Emil (3.03.1898 Wien – 20.12.1962 Hamburg)
Artin wuchs in Reichenbach (heute Liberec) auf. Nach dem Abitur begann er sein Studium 1916 in Wien, wurde aber nach einem Semester zum Militär eingezogen. Nach dem ersten Weltkrieg setzte er sein Studium 1919 in Leipzig fort. In seiner Doktorarbeit *Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen* bei G. Herglotz 1921 untersuchte er quadratische Funktionenkörper einer Variablen über endlichen Körpern. 1922 ging er nach Hamburg, habilitierte sich 1923 und wurde 1925 zum Professor ernannt. 1937 emigrierte Artin in die USA, zunächst nach Notre Dame, dann nach Bloomington (1938–1946) und Princeton (1946–1958). Danach kehrte er nach Hamburg zurück. Zu Artins bekanntesten Ergebnissen gehören die Eigenschaften der Zetafunktion von quadratischen Kongruenzfunktionenkörpern, explizite Formeln für Potenzrestgesetze (zusammen mit Hasse), das Artinsche Reziprozitätsgesetz, die Eigenschaften der Artinschen L-Reihen, die Theorie der reellen Körper (Hilberts 17. Problem), die Arithmetik der Algebren (Artinsche Ringe).

1. E. Artin, *The collected papers of Emil Artin* (S. Lang, J.T. Tate, eds.), Addison-Wesley 560 p. (1965)

2. R. Brauer, *Emil Artin*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967) 27–43

Bannow, Erna
Sie promovierte 1939 in Hamburg mit einer Arbeit *Die Automorphismengruppen der Cayley-Zahlen*. Seit 1940 Ehefrau von Ernst Witt.

Bauer, Michael (Mihaly) (20.09.1874 – Februar 1945, Budapest)
Bauer befasste sich mit algebraischer Zahlentheorie, insbesondere dem Zusammenspiel zwischen Zahlkörpern und deren Komplettierungen.

1. *Bauer Mihaly elete es munkkassaga* (Michael Bauer, sein Leben und sein Werk), Mat. Lapok **4** (1953), 241–262

Bernays, Paul Isaac (17.10.1888 London – 18.09.1977 in Zürich)
Aufgewachsen in Berlin; Studium an der TH Charlottenburg, Universität Berlin, und dann Göttingen. Promotion in Göttingen 1912, *Über die Darstellung von positiven, ganzen Zahlen durch die primitiven, binären quadratischen Formen einer nicht-quadratischen Diskriminante* (E. Landau). Habilitation Ende 1912 in Zürich, danach Privatdozent bis 1917. Hilbert lud ihn nach Göttingen ein, um mit ihm an Grundlagenfragen zu arbeiten. Venia legendi 1919; Emigration in die Schweiz 1933. 1939 venia legendi in Zürich, Professor 1945.

1. E. Specker, *Paul Bernays*, Logic colloquium '78, Proc., Mons/Belgium 1978, Stud. Logic Found. Math. Vol. 97, 381–389 (1979)

2. G. H. Müller, *Paul J. Bernays (1888–1977)*, Math. Intelligencer **1** (1978/79), no. 1, 27–28.

Bernstein, Felix (24.02.1878 Halle an der Saale – 03.12.1956 Zürich)
Bernstein studierte Kunst in Italien, sowie in Halle und Göttingen, wo er 1901 promovierte mit *Untersuchungen aus der Mengenlehre* (Hilbert). Seine Habilitation erfolgte 1902 in Halle bei Cantor mit *Über den Klassenkörper eines algebraischen Zahlkörpers*. In Göttingen arbeitete er seit 1907 auf den Gebieten Statistik, Finanzmathematik, und Humangenetik; 1921 gründete er das Institut für Mathematische Statistik in Göttingen. Er kehrte nach 1933 von einem Aufenthalt in den USA nicht mehr zurück, nachdem er seine Stellung in Göttingen nach der Machtergreifung verloren hatte. 1949 kehrte er nach Europa zurück und arbeitete am Institut für Statistik in Rom.

1. M. Frewer, *Felix Bernstein*, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **83** (1981), 84–95

2. C. Gini, *Felix Bernstein 1878–1956*, Rev. Inst. internat. Statist. **25** (1957), 185–186

Bieberbach, Ludwig (4.12.1886 Goddelau (Darmstadt)–01.09.1982)
Promovierte 1910 in Göttingen mit *Zur Theorie der automorphen Funktionen* bei Klein. Habilitation 1911; danach war er Professor in Basel, Frankfurt, und Berlin. Er war Mitherausgeber der Jahresberichte der DMV 1934, danach trat er wegen seiner nicht abgesprochenen Veröffentlichung des Briefes an Bohr zurück, und gründete zusammen mit Vahlen das Journal „Deutsche Mathematik“. 1945 verlor er seine Stellung, publizierte aber weiterhin.

1. L. de Branges, *Das mathematische Erbe von Ludwig Bieberbach (1886-1982)*, Nieuw Arch. Wiskd., IV. Ser. **9** (1991), 366–370

2. H. Grunsky, *Ludwig Bieberbach zum Gedächtnis*, Jahresber. DMV **88** (1986), no. 4, 190–205

3. H. Mehrtens, *Ludwig Bieberbach and „Deutsche Mathematik“*,

Blaschke, Wilhelm Johann Eugen (13.09.1885 (Graz) - 17.03.1962 (Hamburg))
Blaschke begann sein Studium in Graz, ging dann nach Wien und promovierte dort 1908 bei Wirtinger. Es folgten die Habilitation 1910 in Bonn, sowie Professuren in Greifswald, Prag (1913), Leipzig (1915), Königsberg (1917) und Tübingen. Er war von 1919 bis 1953 Professor in Hamburg, und arbeitete von 1953-55 als Gastprofessor in Istanbul. Sein Hauptarbeitsgebiet war die Differentialgeometrie.

1. *Wilhelm Blaschke (13.09.1885–17.03.1962)*, Result. Math. **5** (1985), 153–163

Blichfeldt, Hans Frederik (9.01.1873 Illar, Denmark – 16.11.1945 Palo Alto, CA)
Seine Familie emigrierte in die USA, als er 15 war. Nach 4 Jahren Arbeit auf Farmen begann er in Stanford Mathematik zu studieren; während seines Aufenthalts an der Universität Leipzig promovierte er mit seiner Arbeit *On a certain class of groups of transformation in three-dimensional space* bei Sophus Lie.. Danach war er Dozent in Stanford von 1898, ab 1913 Professor, ab 1927 Head of Department.

1. L.E. Dickson, Hans Frederik Blichfeldt. 1873–1945, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947). 882–883

Blumenthal, Otto (20.07.1876 Frankfurt, Main – 12.11.1944 Theresienstadt)
Ging in Frankfurt zur Schule und studierte dann in Göttingen, wo er 1898 bei Hilbert promovierte mit *Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Nennern des Kettenbruches für* $\int_{-\infty}^{0}(z-\xi)^{-1}\varphi(\xi)\,d\xi$. Es folgt ein kurzer Aufenthalt in Paris, danach Habilitation in Göttingen über Modulfunktionen mehrerer Veränderlicher. 1905 Professur in Aachen. Nach der Machtergreifung und seiner Denunziation als Kommunist durch Teile des Asta wurde er in ‘Schutzhaft’ genommen (er war Christ und Frontkämpfer im 1. Weltkrieg), am 10. Mai 1933 beurlaubt, im September dann wegen Zugehörigkeit zu pazifistischen Gruppen entlassen. 1938 Arbeitsverbot in Deutschland, 1939 Flucht nach Holland. Seine Frau stirbt nach der deutschen Besetzung der Niederlande 1940 in einem Sammellager, er selbst 1944 in Theresienstadt.

Blumenthal übernahm 1906 die Schriftleitung der Mathematischen Annalen, und behielt sie bis 1938.

1. H. Behnke, *Otto Blumenthal zum Gedächtnis*, Math. Ann. **136** (1958), 387–392

2. A. Sommerfeld, F. Krauss, *Otto Blumenthal zum Gedächtnis*, Jahrbuch T. H. Aachen 1950, 21-26 (1951)

Bochner, Salomon (20.08.1899 Krakov – 2.05.1982 Houston)
Promotion in Berlin 1921, *Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen* (Erhard Schmidt). Nach der Promotion arbeitete er in Copenhagen, Oxford, und Cambridge. Von 1926 bis 1933 war er in München, dann Princeton.

1. Ch.C. Gillispie, *Salomon Bochner as historian of mathematics and science*, Historia Math. **16** (1989), no. 4, 316–323

2. R.C. Gunning, *Collected papers of Salomon Bochner*, 4 vols, AMS 1992

Bohr, Harald (22.04.1887 Copenhagen – 22.01.1951 Copenhagen)
Harald war der jüngere Bruder des Physikers Niels Bohr. Er studierte Mathematik in Kopenhagen und erhielt dort 1915 eine Professur am Polytechnikum. Ab 1930 war er Professor an der dortigen Universität. Sein Hauptgebiet waren Dirichlet-Reihen, und er arbeitete mit Landau zusammen. Harald Bohr wurde bekannt als der Begründer der Theorie der fastperiodischen Funktionen.

1. S. Bochner, *Obituary: Harald Bohr, April 22, 1887 – January 22, 1951*, Bull. Amer. Math. Soc. **58** (1952), 72–75

2. B. Jessen, *Harald Bohr, 22 April 1887 – 22 January 1951*, Acta Math. **86** (1951), I–XXIII

Brandt, Heinrich (8.11.1886 Feudingen - 9.10.1954 Halle)
Er studierte Mathematik in Göttingen, und von 1910 bis 1913 in Straßburg, wo er 1912 bei Weber mit *Zur Komposition der quaternären quadratischen Formen* promovierte. 1913 wurde er Assistent an der TH Karlsruhe, dann leistete er Kriegsdienst, wurde verwundet und lag bis 1916 im Lazarett. 1917 erfolgte seine Habilitation in Karlsruhe, 1921 erhielt er eine Professur an der TH Aachen, 1930 an der Universität Halle als Nachfolger von Hasse. Sein Name wurde bekannt durch seine Untersuchungen zur Idealtheorie in Maximalordnungen von einfachen Algebren. Im Gegensatz zum kommutativen Fall bilden die Ideale hier keine Gruppe, sondern ein „Brandtsches Gruppoid“.

1. M. Eichler, *Heinrich Brandt. Werk und Wesen*, Algebra-Tagung Halle 1986, 11–18

2. W. Jentsch, *Auszüge aus einer unveröffentlichten Korrespondenz von Emmy Noether und Hermann Weyl mit Heinrich Brandt*, Hist. Math. **13** (1986), 5–12

Brauer, Alfred (9.04.1894 Berlin Charlottenburg – 23.12.1985 Chapel Hill)
Promovierte 1928 in Berlin mit *Über diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen* (I. Schur). Brauer emigrierte 1939, seine Schwester Alice Brauer kam im KZ um.

1. R.D. Carmichael, *Alfred T. Brauer: teacher, mathematician, and developer of libraries*, J. Elisha Mitchell Sci. Soc. **102** (1986), 88–106

2. H. Rohrbach, *Alfred Brauer zum Gedächtnis*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **90** (1988), no. 3, 145–154

Brauer, Richard (10.02. 1901 in Berlin-Charlottenburg – 17.04.1977 Belmont)
Promovierte 1925 in Berlin mit *Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch Gruppen linearer Substitutionen* bei I. Schur. Seit WS 1925/26 Assistent in Königsberg. 1927 Habilitation. Er emigrierte im November 1933 nach Lexington, Kentucky; 1934/35 war er in Princeton als Assistent von Hermann Weyl, und ab 1935 in Toronto, Kanada. Im Jahre 1941 ging er nach Wisconsin, 1948 nach Ann Arbor, und 1952 nach Harvard. Zu den wichtigsten Leistungen Brauers gehören seine Arbeiten über Divisionsalgebren (Brauersche Gruppe), über modulare Darstellungen (Block-Theorie), über Artins L-Funktionen (Satz über induzierte Charaktere), und zur Klassifikation endlicher einfacher Gruppen.

1. C.W. Curtis, *Richard Brauer: sketches from his life and work*, Amer. Math. Monthly **110** (2003), no. 8, 665–678;

2. W. Feit, *Richard D. Brauer*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **1** (1979), no. 1, 1–20

3. J.A. Green, *Richard Dagobert Brauer*, Bull. London Math. Soc. **10** (1978), no. 3, 317–342

4. H. Rohrbach, *Richard Brauer zum Gedächtnis*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **83** (1981), no. 3, 125–134

Brinkmann, Heinrich W.
Wirkte 1933–1969 am Swarthmore College, USA.

Cartan, Elie (9.04.1869 Dolomieu – 6.05.1951 Paris)

1. W. V. D. Hodge, *Obituary: Elie Cartan*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 115–119

2. S.S. Chern, C. Chevalley, *Obituary: Elie Cartan and his mathematical work*, Bull. Amer. Math. Soc. **58** (1952), 217–250

Châtelet, Albert (24.10.1883 – 30.06.1960)
1919 Maître de Conférences, 1920-1937 Professor in Lille; 1940-1954 Univ. Paris.

1. P. Dubreil, Revue gén. Sci. pures appl. **61** (1954), 184-185

Chebyshev, Pafnuty Lvovich (16.05.1821 Okatovo – 8.12.1894 St. Petersburg)
Begann sein Studium 1837 in Moskau. 1847 erhielt er eine Stelle in St. Petersburg; 1852 besuchte er Frankreich, England und Deutschland und wiederholte ähnliche Reisen fast jeden Sommer.

1. P. Butzer, F. Jongmans, *P. L. Chebyshev (1821–1894). A guide to his life and work*, J. Approx. Theory **96** (1999), no. 1, 111–138

Chevalley, Claude (11.02.1909 Johannesburg – 28.06.1984 Paris)
Studierte an der École Normale Superieure Paris und besuchte 1931/32 Hamburg (bei Artin) und 1933 Marburg (bei Hasse). Von 1936 bis 1938 lehrte er in Straßburg und Rennes, Im Januar 1934 promovierte er mit der Arbeit *Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux*, die eine eine Neubegründung der Klassenkörpertheorie darstellt. 1938 ging Chevalley in die USA an das Institute for Advanced Science in Princeton. Von 1949 bis 1957 arbeitete er an der Columbia University, New York und kehrte dann nach Paris zurück.

1. J. Dieudonné, J. Tits: *La vie et l'œuvre de Claude Chevalley*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. Vie. Sci. **3** (1986), 559–565

Cohn-Vossen, Stephan (28.05.1902 Breslau – 25.06.1936 Moskau)
Promovierte 1924 in Breslau mit *Singuläre Punkte reeller, schlichter Kurvenscharen, deren Differentialgleichung gegeben ist* (A. Kneser). Habilitation Göttingen 1929, Umhabilitation Köln 1930, Entlassung 1933, Emigration in die Sowjetunion 1934, Professor in Leningrad 1935, Moskau 1936.

Courant, Richard (1888 Lublinitz – 27.01.1972 New York)
Studierte in Breslau, Zürich und Göttingen, wo er 1910 mit *Über die Anwendung des Dirichletschen Prinzipes auf die Probleme der konformen Abbildung* bei Hilbert promoviert. Er war von 1920 bis 1933 Leiter des Mathematischen Instituts in Göttingen; er verließ Deutschland im Sommer 1933, verbrachte ein Jahr in Cambridge, und ging dann nach New York, wo er 1936 eine Professur erhielt und das heute so genannte „Courant Institute" aufbaute.

1. C. McLarty, *Richard Courant in the German Revolution*, Math. Intell. **23** (2001), No.3, 61–67

2. C. Reid, *Richard Courant: 1888–1972*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979. iv+373 pp

Davenport, Harold (30.10.1907 Huncoat, Lancashire – 9.06.1969 Cambridge)
Begann 1924 in Manchester bei Mordell zu studieren, ging 1927 nach Cambridge und promovierte dort 1938 unter Littlewood über die Verteilung quadratischer Reste. Seine Begegnung mit Hasse im Jahre 1931 und in den folgenden Jahren führte dazu, dass Hasse sich mit dem Analogon der Riemannschen Vermutung für

Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper zu beschäftigen begann; aus diesem Kontakt erwuchs 1934 eine gemeinsame Arbeit mit Hasse über die heute so genannten Davenport-Hasse Kurven. 1937 ging Davenport nach Manchester, 1941 nach Bangor (Wales), und kehrte 1958 nach Cambridge and das Trinity College zurück.

1. C.A. Rogers, *Harold Davenport. With contributions by B. J. Birch, H. Halberstam and D. A. Burgess*, Bull. London Math. Soc. **4** (1972), 66–99

Dedekind, Richard (6.10.1831 Braunschweig – 12.02.1916 Braunschweig)
Promovierte 1852 in Göttingen mit *Über die Theorie der Eulerschen Integrale* bei C.F. Gauss. Nach seiner Habilitation 1854 wurde er 1858 Dozent in Zürich, ab 1862 Lehrer am Polytechnikum in Braunschweig. Zu Dedekinds Leistungen gehört seine Theorie der reellen Zahlen, der Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahlkörpern, und, zusammen mit Weber, in Funktionenkörpern.

1. Ilse Dedekind, P. Dugac, W.-D. Geyer, W. Scharlau, *Richard Dedekind, 1831–1981. Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag*, Vieweg, Braunschweig, 1981. iv+146 pp

2. P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1976. 334 pp.

Deuring, Max (9.12.1907 Göttingen – 20. Dezember 1984)
Studierte von 1926 bis 1930 in Göttingen, und besuchte im Wintersemester 1928/29 Rom. Er promovierte 1930 bei E. Noether über die *Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen.* Danach erhielt er ein Stipendium der „Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft“ und arbeitete als Assistent bei van der Waerden in Leipzig. Emmy Noether sprach von ihm als ihrem „besten Schüler“. 1934 erschien sein Ergebnisbericht, der die Hasse-Noethersche Theorie der Arithmetik in Algebren weltweit bekannt machte. 1935 habilitierte er sich in Göttingen, 1938 erfolgte die Umhabilitation nach Jena, und 1943 erhielt er eine Professur in Posen. Nach Kriegsende war er 1947 in Marburg, 1948 in Hamburg, und von 1950 bis 1976 als Nachfolger von Herglotz in Göttingen. Zu den wesentlichen mathematischen Beiträgen Deurings zählen die Entwicklung der algebraischen Korrespondenzentheorie in Richtung auf den Beweis der Riemannschen Vermutung für Funktionenkörper, die algebraische Begründung der komplexen Multiplikation, und die Untersuchung der Zetafunktionen elliptischer Kurven über Zahlkörpern.

1. M. Kneser, *Max Deuring 9.12.1907 bis 20.12.1984*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **89** (1987), no. 3, 135–143

2. P. Roquette, *Über die algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten von Max Deuring*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **91** (1989), no. 3, 109–125

Dickson, Eugene (22.01.1874 Independence – 17.01.1954 Harlingen)
Promovierte 1896 in Chicago mit *The Analytic Representation of Substitutions on a Power of a Prime Number of Letters with a Discussion of the Linear Group.*

1. D. Fenster, *Leonard Eugene Dickson: An American legacy in mathematics*, Math. Intell. **21** (1999), 54–59
2. D. Fenster, *Leonard Eugene Dickson and his work in the arithmetics of algebras*, Arch. Hist. Exact Sci. **52** (1998), 119–159

Dirac, Paul Audrien Maurice (8.08.1902 Bristol – 20.10.1984 Tallahassee)
Studierte in Bristol und Cambridge, wo er 1926 bei R. Fowler promovierte. 1933 erhielt er den Nobelpreis für Physik.

Engstrom, Howard T. (23.06.1902 – 9.03.1962)
Erhielt seinen Ph. D. 1929 in Yale für *On the Common Index Divisors of an Algebraic Field*, und war danach dort associate professor. 1931/32 studierte er in Göttingen bei Emmy Noether und traf dort auch Hasse. Die AMS besetzte 1942 ein fünfköpfiges Kommittee für Kryptographie, zu dem neben A. A. Albert auch Engstrom gehörte; später kam noch O. Hazlett dazu. Nach dem Krieg war Engstrom massgeblich an der Entwicklung der UNIVAC beteiligt.

Feigl, Georg (13.10.1890 Hamburg – 24.04.1945 Wechselburg)
Studierte in Jena und promovierte dort 1919 bei Koebe mit *Kegelschnittverwandtschaften bei der konformen Abbildung durch rationale Funktionen erster und zweiter Ordnung*. Feigl interessierte sich für die Axiomatik der Geometrie; 1928 wurde er Herausgeber des Jahrbuches der Fortschritte der Mathematik.

Fekete, Michael (19.07.1886 – 13.05.1957)
Leitete das Mathematische Institut in Jerusalem zusammen mit A. Fraenkel, nachdem Landau 1928 wieder zurueck nach Deutschland gegangen war.

1. W.W. Rogosinski, J. London Math. Soc. **33** (1958), 496–500

Fitting, Hans (13.11.1906 Mönchengladbach – 15.06.1938 Königsberg)
Studierte in Tübingen und Göttingen; dort promovierte er 1931 mit *Zur Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nichtkommutativen Gruppen* bei E. Noether. Danach war er bis 1934 Stipendiat in Göttingen und Leipzig, ab 1934 in Königsberg, wo er sich 1936 habilitierte, und 1937 Dozent wurde.

1. H. Zassenhaus, Jahresber. DMV **49** (1939), 93–96

Flexner, Abraham (13.11.1866 Louisville – 21.09.1959 Falls Church)
Amerikanischer Bildungspolitiker. Er spielte eine wichtige Rolle bei der Reform der College-Ausbildung in Amerika. Er war die treibende Kraft bei der Planung und Gründung des Institute for Advanced Study in Princeton im Jahre 1930, und er wurde dessen erster Direktor 1930-1939.

Franz, (Karl Otto Georg) Wolfgang (04.10.1905–26.04.1996)
Studierte von 1924 bis 1930 in Kiel, promovierte 1930 in Halle über *Untersuchungen zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz* bei Hasse, war 1930–1935 Assistent von Hasse und dann Reidemeister in Marburg, 1936 Dozent in Marburg, 1937 in Giessen, 1940 in Frankfurt, und war dort von 1943 bis 1974 Professor.

1. G. Burde, W. Schwarz, Jahresber. DMV **100** (1998), 284–292

Fricke, Robert (24.09.1861 Helmstedt – 18.07.1930 Braunschweig)
Nach seiner Schulausbildung in Braunschweig begann Fricke im Wintersemester 1880 sein Studium der Mathematik und Physik in Göttingen. Das darauffolgende Sommersemester (nach eigenen Worten „mehr der Erholung gewidmet") verbringt er in Zürich, die darauffolgenden drei Semester in Berlin. Er promovierte 1886 in Leipzig mit *Über Systeme elliptischer Modulfunktionen von niederer Stufenzahl* bei Felix Klein. Danach lehrte er an zwei Gymnasien in Braunschweig, habilitierte sich in Kiel 1892, und war danach als Privatdozent in Göttingen tätig. 1894 wurde er Dedekinds Nachfolger in Braunschweig und heiratet Klein's Nichte Eleonora Flender. Gemeinsam mit Emmy Noether und Øystein Ore gab er Dedekinds Gesammelte Werke heraus.

Frobenius, Georg (26.10.1849 Berlin-Charlottenburg – 3.08.1917 Berlin)
Frobenius nahm 1867 sein Studium in Göttingen auf, und setzte es danach in Berlin fort. Er promovierte 1870 bei Weierstraß, unterrichtete danach an einem Gymnasium, und erhielt 1874 eine Professur an der Universität Berlin, ohne sich zuvor habilitiert zu haben. 1875 ging er an das Polytechnikum in Zürich, 1892 kehrte er nach Berlin zurück.

1. R. Haubrich, *Frobenius, Schur, and the Berlin algebraic tradition*, Mathematics in Berlin, 83–96, Birkhäuser 1998

Fröhlich, Albrecht (22.05.1916 München – 8.11.2001 Cambridge)
Musste 1933 aus München fliehen, und ging über Frankreich nach Palästina. Erst 1945 konnte er in Bristol sein Studium beginnen, wo er 1951 mit *Theory of Representation of Groups and Individual Class Field Theory* bei Heilbronn promovierte. 1951 erhielt er eine Stelle in London, 1962 einen Lehrstuhl.

1. P. Roquette, *Albrecht Fröhlich*, Nachruf für die Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Furtwängler, Philipp (21.4.1869 Elze –19.5.1940 Wien)
Promovierte 1896 in Göttingen bei Klein mit *Zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren ganzzahlingen ternären kubischen Formen.* 1899 wurde er Assistent am Geodätischen Institut in Potsdam, 1904 Professor an der landwirtschaftlichen Akademie in Bonn, 1907 schließlich Professor für Mathematik an der TH Aachen. 1910 war er wieder an der landwirtschaftlichen Akademie in Bonn, und ab 1912 war er Professor für Mathematik in Wien. Er leistete bedeutende Beiträge zur Klassenkörpertheorie.

1. N. Hofreiter, *Nachruf auf Philipp Furtwängler*, Monatsh. Math. Phys. **49** (1940), 219–225

2. A. Huber, *Philipp Furtwängler. Nachruf*, Jber. DMV **50** (1941), 167–178

Galois, Evariste (25.10.1811 Bourg la Reine – 31.05.1832 Paris)

Gauss, Carl Friedrich (30.04.1777 Braunschweig – 23.02.1855 Göttingen)

Geppert, Harald (22.03.1902 – 4.05.1945)
Promovierte 1923 in Breslau über *Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach funktionentheoretischen Methoden* bei A. Kneser. War 1930–1940 Professor in Giessen, 1940–1945 an der Universität Berlin. In Berlin wirkte er als Chefredakteur der gemeinsamen Redaktion des Jahrbuchs für die Fortschritte der Mathematik und des Zentralblatts für Mathematik. Die Muttersprache von Geppert war Italienisch, und er pflegte stets einen engen Kontakt zu italienischen Mathematikern, insbesondere auf dem Gebiet der algebraischen Geometrie. Seine Schwester Maria-Pia (1906-1997) war ebenfalls Mathematikerin (Habilitation 1942 in Giessen, 1943 Privatdozentin in Frankfurt, 1947 bis 1951 Lehrbeauftragte an der TH Darmstadt, ab 1951 Professorin an der Universität Frankfurt, ab 1964 in Tübingen an dem neugegründeten Lehrstuhl für Medizinische Biometrie).

Gordan, Paul Albert (27.04.1837 Breslau – 21.12.1912 Erlangen)
Promovierte 1862 in Breslau 1862 mit *De Linea Geodetica* bei C.G. Jacobi. Wurde 1874 Professor in Erlangen. Sein Name ist bekannt durch seine Arbeiten zur Invariantentheorie.

1. *Redaktion der Mathematischen Annalen und Paul Gordan* †, Math. Ann. **73** (1913), 321–322

2. A. Y., *Obituary notices on Paul Gordan*, Lond. Math. Soc. Proc. (2) **12** (1913), LI-LIV

Grandjot, Karl (23.08.1900 Frankenberg (Hessen) – 1979 Concepción (Chile))
Promovierte 1922 in Göttingen mit *Über das absolute Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen*. 1925 wurde er Privatdozent in Göttingen, 1929 Professor an der Universität von Santiago de Chile.

Grell, Heinrich (3.02.1903 Lüdenscheid – 21.8.1974 Ostberlin)
Erhielt 1922 sein Abitur und studierte danach in Göttingen. Dort promovierte er 1926 über *Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe* bei Emmy Noether. Die Habilitation mit der Arbeit *Verzweigungstheorie in beliebigen Ordnungen algebraischer Zahl- und Funktionenkörper* folgte 1930 in Jena. Danach erhielt er dort einen Lehrauftrag. 1934 – 1935 Dozententätigkeit in Halle. Von 1939 bis 1944 war er im Entwicklungsbüro von Messerschmidt tätig, 1944/45 als Mathematiker beim Reichsforschungsrat in Erlangen. Von 1945 bis 1948 war er wissenschaftlicher Assistent in Erlangen und Bamberg, danach bis 1968 Professor an der Humboldt-Universität Berlin.

1. *Heinrich Grell (3.2.1903–21.8.1974)*, Math. Nachr. **65** (1975), 5–6

2. L. Budach, *Prof. Dr. Heinrich Grell. (3.2.1903 - 21.8.1974)*, Mitt. Math. Ges. DDR 1974, No. **3** (1974), 5–8

Gröbner, Wolfgang (11.02.1899 Gossensaß – 20.08.1980)
Studium der Technik an der TU Graz nach dem ersten Weltkrieg, das er nach einem tödlichen Motorradunfall seines Bruders abbrach. 1929 nahm er ein Mathematikstudium an der Uni Wien auf, wo er 1932 mit *Ein Beitrag zum Problem der Minimalbasen* bei Furtwängler promovierte. 1933 war er als Postdoc bei Emmy Noether, danach ging er stellenlos zurueck nach Oesterreich. 1941 war er kurzfristig Professor an der Universität Wien, danach wurde er zum Wehrdienst einberufen. 1947 erhielt er eine Professur in Innsbruck.

1. H. Reitberger, *Wolfgang Gröbner (11.2.1899-20.8.1980) zum 20. Todestag*, Int. Math. Nachr. Wien **184** (2000), 1–27

2. R. Liedl, H. Reitberger, *Wolfgang Gröbner zum Gedenken*, Yearbook: Surveys of mathematics 1981, pp. 255–256

Grunwald, Wilhelm (15.7.1909 Rastenberg – 7.6.1989)
Er begann sein Studium in Halle; als Hasse 1930 nach Marburg ging, folgte ihm Grunwald. Dort promovierte er 1932 mit *Charakterisierung des Normenrestsymbols durch die p-Stetigkeit, den vorderen Zerlegungssatz und die Produktformel*. Nach seiner Promotion durchlief Grunwald eine Ausbildung zum Bibliothekar und arbeitete als solcher in Halle, Kiel und Göttingen. Sein Name wurde bekannt durch den „Existenzsatz von Grunwald-Wang“.

1. *Nachruf*, Zeitschrift für Bibliothekswesen und Bibliographie **36** (1989), 477–478

Hammerstein, Adolf (7.06.1888 – 25.02.1941)
Ph. D. Göttingen 1919, Zwei Beiträge zur Zahlentheorie (E. Landau) 1927–1935 Nachfolger von Szegö in Berlin, danach Professor in Kiel.

Haussner, Robert (6.02.1863–6.04.1948)
Promovierte 1889 in Göttingen mit *Die Bewegung eines von zwei festen Centren nach dem Newton'schen Gesetze ausgezogenen materiellen Punktes*. 1905-34 Professor Jena, 44-48 Stockholm

Hazlett, Olive Clio (27.10.1890 Cincinnati – 8.03.1974 Peterborough)
Studierte an der Universität Chicago, wo sie 1913 den masters und 1915 einen Ph.D. erhielt, letzteren für *On the Classification and Invariantive Characterization of Nilpotent Algebras* unter Dickson. 1915 verbrachte sie in Harvard, 1916 bis 1918 als Lehrkraft in Bryn Mawr; danach wurde sie assistant professor in Mount Holyoke, 1924 Illinois. 1928 besucht sie Göttingen, 1929 Zürich.

Hecke, Erich (20.09.1887 Buk (Posen) – 13.02.1947 Kopenhagen)
Nach dem Gymnasium in Posen begann Hecke 1905 sein Studium in Breslau, ging dann nach Berlin und Göttingen, wo er 1910 bei Hilbert mit *Zur Theorie der Modulfunktionen von zwei Variablen und ihrer Anwendung auf die Zahlentheorie* promovierte. 1912 folgte die Habilitation, danach war er Privatdozent in Göttingen bis er 1915 eine Professur in Basel erhielt. 1918 kehrte er nach Göttingen zurück, ging aber 1919 an die neu gegründete Universität nach Hamburg.

1. B. Schoeneberg, *Erich Hecke 1887–1947* Jahresber. DMV **91** (1989), no. 4, 168–190

2. Abh. Math. Sem. Hamburg **16** (1949), 1–6

Heesch, Heinrich (25.06.1906 Kiel – 26.07.1995 Hannover)
Begann sein Studium München 1925 (Physik, Mathematik, Musik); 1928 ging er nach Zürich und begann sich für Kristallographiegruppen zu interessieren. Er promovierte 1929 bei Gregor Wentzel mit *Zur systematischen Strukturtheorie.* 1930 ging Weyl nach Göttingen und nahm Heesch als Assistenten mit. Er verliess 1935 die Universität und verbrachte 1935 - 1948 stellenlos bei seinen Eltern in Kiel. 1955 wurde er Lehrbeauftrager an der TH Hannover, 1958 folgte die Habilitation, danach war er Privatdozent und schliesslich Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Heesch arbeitete vor allem in der Kombinatorik (Parkettierungen).

1. H.-G. Bigalke, *Heinrich Heesch. Kristallgeometrie. Parkettierungen. Vierfarbenforschung*, Vita Mathematica, 3, Birkhäuser Verlag, Basel, 1988. 320 pp

2. `http://www.ifg.uni-kiel.de/eckenundkanten/hk-02_de.html`

Hensel, Kurt (29.12.1861 Königsberg – 1.06.1941 Marburg)
Hensel studierte in Bonn und Berlin, wo er 1884 über *Arithmetische Untersuchungen über Diskriminaten und ihre ausserwesentlichen Teiler* bei Kronecker promovierte. Hensel ist der Entdecker der p-adischen Zahlen.

1. H. Hasse, *Ansprache zum 70. Geburtstag des Geh. Regierungsrats Prof. Dr. Kurt Hensel*, Mitteilungen Universitätsbund Marburg 1932, 3-6.

2. H. Hasse, *Kurt Hensel zum 75. Geburtstag am 29. Dezember 1936*, Forschungen und Fortschritte 12 (1936) Nr. 35/36.

3. H. Hasse, *Kurt Hensel zum Gedächtnis*, J. Reine Angew. Math. **187** (1949), 1–13

Herbrand, Jacques (12.02.1908 Paris – 27.07.1931 La Bérarde)
Promovierte 1930 in Paris mit *Recherches sur la théorie de la démonstration.* Danach war er bis Mai 1931 in Berlin bei von Neumann, im Juni bei Artin in Hamburg, und im Juli in Göttingen bei Emmy Noether.
`http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/ennote.html`

1. *Nécrologie. Jacques Herbrand (1908-1931)*, Revue de Métaphys. et de Morale 39_2, Suppl. 16 (1932)

2. C. Chevalley, *Sur la pensée de Jacques Herbrand*, Ens. Math. **34** (1935/36), 97–102

Herglotz, Gustav (2.02.1881 Wallern – 22.03.1953 Göttingen)
Promovierte 1902 in München mit *Über die scheinbaren Helligkeitsverhältnisse eines planetarischen Körpers mit drei ungleichen Hauptträgheitsachsen* bei H. von Seeliger und L. Boltzmann. Habilitation 1924 in Göttingen für Mathematik und Astronomie. 1909 Professor in Leipzig. Zu seinen Doktoranden in Leipzig gehörte E. Artin (1921). Von 1925 bis 1950 war Herglotz Professor in Göttingen.

1. H. Tietze, *Gustav Herglotz. 2.2.1881-22.3.1953*, Jahrbuch Bayr. Akad. Wiss. 1953 (1954), 188–194

Hey, Käte (19.02.1904 Hamburg – 23.07.1990)
Käte Hey begann ihr Studium nach ihrem Schulabschluss 1923 an der Universität Hamburg. Sie promovierte dort 1927 bei Artin über *Analytische Zahlentheorie in Systemen Hyperkomplexer Zahlen*. Danach ging sie in den Schuldienst.

1. F. Lorenz, *Käte Hey und der „Hauptsatz der Algebrentheorie“*, Heft 298, Preprintreihe des SFB, Univ. Münster (2003)

Hilbert, David (23.01.1862 Königsberg – 14.02.1943 Göttingen)

1. C. Reid, *Hilbert*, 2nd ed. Springer-Verlag 1996
2. V. Vinnikov, *We shall know: Hilbert's apology*, Math. Intell. **21** (1999), 42–46

Hölder, Otto Ludwig (22.12.1859 Stuttgart, 29.08.1937 Leipzig)
begann sein Studium 1876 in Stuttgart und setzte es 1877 in Berlin fort. Er promovierte 1882 in Tübingen und arbeitete danach in Leipzig; 1889 erhielt er eine Professur in Tübingen.

1. B.L. van der Waerden, *Nachruf auf Otto Hölder*, Math. Ann. **116** (1938), 157–165

Hopf, Eberhard (17.04.1902 Salzburg – 24.07.1983 Bloomington)
Promovierte 1926 in Berlin mit *Über die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differenzenquotienten reeller Funktionen einer reellen Variablen und deren Differenzierbarkeitseigenschaften* bei E. Schmidt und I. Schur.

1. M. Denker, *Eberhard Hopf. 04-17-1902 to 07-24-1983*, Jahresber. DMV **92** (1990), 47–57

Hopf, Heinz (19.11.1894 Gräbschen – 03.06.1971 Zollikon)
Promovierte 1925 in Berlin mit *Über Zusammmenhänge zwischen Topologie und Metrik von Mannigfaltigkeiten* bei E. Schmidt und L. Bieberbach; von 1931 bis 1965 war er als Professor an der ETH Zürich tätig.

1. G. Frei, U. Stammbach, *Heinz Hopf*, History of topology, 991–1008, North-Holland, Amsterdam, 1999.

2. H. Samelson, *Heinz Hopf zum Gedenken. II. Zum wissenschaftlichen Werk von Heinz Hopf*, Jber. Deutsch. Math.-Verein. **78** (1976/77), no. 3, 126–146

Hurwitz, Adolf (26.03.1859 Hildesheim – 18.11.1919 Zürich)
Begann sein Studium in Berlin und promovierte 1881 bei Klein in Leipzig mit *Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplikatorgleichung 1. Stufe*. 1884 erhielt er eine Professur in Königsberg, 1892 ging er nach Zürich.

1. G. Frei, *Adolf Hurwitz (1859-1919)*, Die Albertus-Universität zu Königsberg und ihre Professoren, 527–541 (1995)

Iyanaga, Shokichi (2.04.1906 Tokyo –)
Promovierte 1931 in Tokyo bei T. Takagi, und studierte danach bei Artin in Hamburg. Er nachm am ICM 1932 in Zürich teil, und besuchte anschließend zusammen mit Takagi Hamburg, Berlin und Paris. 1934 kehrte er als assistant professor nach Tokyo zurück.

Jacobi, Carl Gustav Jacob (10.12.1804 Potsdam – 18.02.1851 Berlin)
Begann sein Studium 1821 in Berlin; 1825 wurde er Gymnasiallehrer, ein Jahr später lehrte er an der Universität Berlin, ging aber noch im selben Jahr nach Königsberg. 1843 reiste er aus gesundheitlichen Gründen nach Italien, und nach seiner Rückkehr lehrte er ab 1844 in Berlin.

1. H. Pieper, *Carl Gustav Jacob Jacobi*, Mathematics in Berlin, Birkhäuser; 41–48 (1998)

Jarnik, Vojtech (22.12.1897 Prag – 22.09.1970 Prag)
War von 1921 bis 1929 Assistent, danach bis 1968 Professor in Prag. In den Jahren 1923/24 und 1927/28 besuchte er Göttingen und arbeitete mit Landau.

1. B. Korte, J. Nesetril, *Vojtech Jarnik's work in combinatorial optimization*, Discrete Math. **235** (2001), 1–17
2. B. Novak, St. Schwarz, *Vojtech Jarnik (22.12.1897-22.9.1970)*, Acta Arith. **20** (1972), 107–123

Jordan, Camille (5.01.1838 La Croix-Rousse, Lyon – 22.01.1922 Paris)
Begann 1855 sein Studium an der École Polytechnique; 1876 wurde er dort Professor.

1. É. Bertin, É. Picard, *Nachruf auf Camille Jordan*, C. R. **174** (1922), 209–211

Kaluza, Theodor (9.11.1885 Ratibor – 19.01.1954 Göttingen)
Promovierte 1907 in Königsberg über *Die Tschirnhaustransformation algebraischer Gleichungen mit einer Unbekannten* bei F. Meyer. Kaluza wurde bekannt durch seine Theorie der Vereinheitlichung der Einsteinschen Feldgleichungen zur Gravitationstheorie mit der Maxwellschen Theorie des elektromagentischen Feldes, die die Einführung einer fünften Dimension einschließt. 1929 Professor für angewandte Mathematik in Kiel, 1935 in Göttingen.

1. D. Laugwitz, *Theodor Kaluza 1885–1954*, Jahrb. Überblicke Math. 1986, Math. Surv. **19** (1986), 179–187

2. D.A. Wünsch, *Theodor Kaluza: Leben und Werk (1885–1954)*, Univ. Stuttgart, Historisches Institut, pt. I 219 S, pt. II 220 S (2000)

Kapferer, Heinrich (28.10.1888 – 15.01.1984)
Promovierte 1917 in Freiburg mit *Über Funktionen von Binomialkoeffizienten* bei Stickelberger. 1926 Privatdozent, 1932–1950 Professor in Freiburg.

Klein, Felix (25.04.1849 Düsseldorf – 22.06.1925 Göttingen)
Er studierte von 1865 bis 1866 in Bonn, wo er mit *Über die Transformationen der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form* bei Plücker promovierte. 1871 erhielt er einen Lehrauftrag in Göttingen, 1872 eine Professur in Erlangen, 1875 in München, 1880 in Leipzig. 1886 schließlich ging er nach Göttingen, wo er bis zu seiner Emeritierung 1913 aktiv war.

1. R. Tobies, *Felix Klein in Erlangen und München: ein Beitrag zur Biographie*, Demidov et. al, Festschrift f. Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag, 751–772 (1992)

Knauf, Ernst: `http://www.mathematik.ch/mathematiker/noether.php`

Knopp, Konrad (22.07.1882–30.04.1957)
Promovierte 1907 in Berlin über *Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze* bei Schottky und Frobenius. 1914 Habilitation in Berlin, 1915 Professor in Königsberg, von 1926 bis 1950 Professor in Tübingen.

1. E. Kamke, K. Zeller, *Konrad Knopp*, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **60** (1957), 44–49

Koebe, Paul (15.02.1882 Luckenwalde, 6. 08. 1945 Leipzig)
War von 1926 bis 1945 Professor in Leipzig.

1. H. Cremer, *Erinnerungen an Paul Koebe*, Jahresber. DMV **70** (1968), 158–161

Köthe, Gottfried (25.12.1905 Graz – 30.04.1989)
Promovierte 1927 in Innsbruck (Graz?) mit *Beiträge zu Finslers Grundlegung der Mengenlehre* bei T. Rella und R. D. von Sterneck. 1931 Privatdozent in Münster, ab 1937 Professuren in Münster, Gießen, Mainz, Heidelberg und Frankfurt.

1. H.G. Tillmann, *Gottfried Köthe, 1905-1989*, Note Mat. **10** (1990), No.Suppl. 1, 9–21

2. J. Weidmann, *Gottfried Köthe, 1905-1989*, Note Mat. **10** (1990), No.Suppl. 1, 1–7

Korselt, Alwin (17.03.1864 Mittelherwigsdorf – 4.02.1947 Plauen)
Besuchte von 1876 bis 1885 das Zittauer Gymnasium, und studierte dann bis 1890 in Leipzig und Freiburg. Nach dem Probejahr am Nikolaigymnasium zu Leipzig unterrichtete er von Ostern 1891 bis 1896 an der Handelsschule zu Pirna, der Böhmischen Realschule zu Dresden und der Erziehungsanstalt zu Keilhau bei Rudolstadt. Danach folgten Anstellungen an den Realschulen in Löbau, Meerane und Plauen. 1902 bewarb er sich in Leipzig erfolgreich um eine Promotion mit seiner Arbeit *Über die Möglichkeit der Lösung merkwürdiger Dreiecksaufgaben durch Winkelteilung* bei O. Hölder und C. Neumann. Korselt war von 1899 bis zu seiner Versetzung in den Ruhestand 1924 Oberlehrer an der Oberrealschule Plauen.

Koschmieder, Lothar (22.04.1890 (Liegnitz/Legnici) – 6.03.1974 Tübingen)
Promovierte 1913 in Breslau über *Anwendung der elliptischen Funktionen auf die Bestimmung konjugierter Punkte bei Problemen der Variationsrechnung* bei A. Kneser. Danach war er bis 1924 Assistent bei Kneser in Breslau, wo er 1919 mit *Untersuchungen über Jacobische Polynome* habilitierte. 1924 wurde er Professor in Breslau, dann bekam er eine Zeitstelle in Greifswald. 1927 wurde er auf eine Professor in Brno (Brünn) berufen, und arbeitete von 1940 bis 1946 an der TU Graz, von 1948 bis 1949 an der Universität Tucuman in Argentinien, 1953 bis 1958 in Baghdad, und von 1958 bis 1973 Tübingen. Dazwischen war er von 1968 bis 1970 Gastprofessor in Izmir.

1. F.E. Herrera, *Prof. Dr. Lothar Koschmieder* (Spanish), Univ. Nac. Tucumán, Rev., Ser. A **13** (1960), 41–46

Kronecker, Leopold (7.12.1823 Liegnitz – 29.12.1891 Berlin)
Ging auf dem Liegnitzer Gymnasium zur Schule, wo er u.a. von Kummer unterrichtet wurde. 1841 nahm er sein Studium in Berlin auf, das er in Bonn und Breslau fortsetzte. 1845 promovierte er bei Dirichlet in Berlin. 1855 ging er nach Berlin und übernahm Crelles Journal nach dessen Tod; 1861 wurde er zum Mitglied der Berliner Akademie gewählt und erhielt dadurch das Recht, an der Universität Berlin zu lehren.

Krull, Wolfgang (26.08.1899 Baden-Baden – 12.04.1971 Bonn)
Krull nahm 1919 sein Studium in Freiburg auf und setzte es in Rostock und ab 1920 in Göttingen fort. In Göttingen hate er mathematischen Kontakt zu Emmy Noether, durch die seine Arbeiten stark beeinflusst wurden. 1922 bekam er eine Dozentenstelle in Freiburg, und 1926 eine Professur. 1928 wechselte er nach Erlangen, 1939 nach Bonn.

1. H.-J. Nastold, *Wolfgang Krulls Arbeiten zur kommutativen Algebra und ihre Bedeutung für die algebraische Geometrie*, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **82** (1980), 63–76

2. H. Schöneborn, *In memoriam Wolfgang Krull*, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **82** (1980), 51–62

Kummer, Eduard (19.01.1810 Sorau – 14.05.1893 Berlin)
War 1831-32 Lehrer in Sorau, danach in Liegnitz; 1842 erhielt er eine Professur in Breslau, 1855 in Berlin.

1. G. Terjanian, *L'oeuvre arithmétique de Kummer*, Gaz. Math. **66** (1995), 45–53

Lagrange, Joseph-Louis (25.01.1736 Turin – 10.04.1813 Paris)
Arbeitete in Turin, nach Eulers Weggang aus Berlin dort, und 1787 ging er nach Paris.

1. F.R. Marsicano, *Lagrange. His life and work* (Spanish), Mem. Semin. Mec. **4** (1988), 79–100

2. T. Koetsier, *Joseph Louis Lagrange (1736-1813), his life, his work and his personality*, Nieuw Arch. Wiskd., IV. Ser. **4** (1986), 191–206

Landau, Edmund: (14.02.1877 Berlin – 19.02.1938 Berlin)
Nach seinem frühen Abitur studierte Landau in Berlin, wo er 1899 mit *Neuer Beweis der Gleichung* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$ bei Frobenius und L. Fuchs promovierte. 1901 folgt seine Habilitation; 1909 wurde er Nachfolger von Minkowski in Göttingen. Landau nahm 1925 an der Einweihung der Hebräischen Universität in Jerusalem teil und war 1927 der erste Inhaber des dortigen Lehrstuhls für Mathematik, ging aber danach wieder nach Göttingen zurück. 1933 beurlaubt, 1934 entlassen. 1935 hielt er Vorlesungen in Cambridge.

1. M.R. Chowdhury, *Landau and Teichmüller*, Math. Intell. **17** (1995), No.2, 12–14

2. N. Schappacher, *Edmund Landau's Göttingen: From the life and death of a great mathematical center*, Math. Intell. **13** (1991), No.4, 12–18

Landauer, ?: Tochter von Fricke

Lefschetz, Solomon (3.09.1884 Moskau – 5.10.1972 Princeton)
Seine Familie zog kurz nach seiner Geburt nach Frankreich. 1905 emigrierte er in die USA. Bei einem Arbeitsunfall verlor er 1907 beide Hände, begann 1910 Mathematik zu studieren, und promovierte 1911 an der Clark University mit *On the Existence of Loci with Given Singularities* bei W. Story. Es folgten Stellen in Lincoln und Lawrence, 1924 schließlich in Princeton.

1. W. Hodge, *Solomon Lefschetz*, Bull. London Math. Soc. **6** (1974), 198–217

2. L. Markus, *Solomon Lefschetz. An appreciation in memoriam*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), 663–680

Levitzki, Jacob (Levitzky, Yaakov) (1904-1956)
Promovierte 1929 mit *Über vollständig reduzible Ringe und ihre Unterringe* bei Emmy Noether. Lehrte später an der Hebräischen Universität in Jerusalem.

1. S.A. Amitsur, *Jacob Levitzki 1904-1956*, Isr. J. Math. **19** (1974), 1-3 (1975)

Lewy, Hans (20.10.1904 Breslau – 23.08.1988 Berkeley)
Promovierte 1925 in Göttingen mit *Über einen Ansatz zur numerischen Lösung von Randwertproblem* bei Courant. 1933 emigrierte er in die USA und war bis 1935 an der Brown University, danach in Berkeley.

1. C. Reid, *Hans Lewy 1904–1988*, Miscellanea mathematica, 259–267, Springer, Berlin, 1991

Löwner, Charles (Karel, Karl) (29.05.1893 Lany (Böhmen) – 8.01.1968 Stanford)
Promovierte 1917 in Prag bei G. Pick. Ab 1922 war er Assistent an der Universität Berlin, später Privatdozent. 1928 erhielt er eine Professur an der Universität Köln, 1930 in Prag. Nach dem deutschen Einmarsch emigrierte er in die USA.

1. Charles Loewner, *Collected Papers*, (L. Bers, ed.) Springer 1988

Ludwig, Walther (10.06.1876 Breslau, 20.12.1946 Dresden)
War von 1909 bis zu seiner Emeritierung 1939 Professor in Dresden (Darstellende Geometrie).

MacDuffee, Cyrus Colton (29.06.1895 Oneida – 21.08.1961 Madison)
Promovierte 1921 in Chicago bei Dickson über *Invariantive characterizations of Linear Algebras with the associative law not assumed.* 1924 wurde er assistant professor, 1929 associate und 1933 full professor an der Ohio State University in Columbus. Von 1935 bis 1940 war er in Wisconsin, 1940 bis 1943 in New York, und dann bis 1961 wieder in Wisconsin. 1933 veröffentlichte er das Buch 'The Theory of Matrices' in der Reihe Ergebnisse der Mathematik bei Springer.

1. Amer. Math. Monthly **68** (1961), 1029

Mac Lane, Saunders (4.04.1909 Taftville – 14.04.2005 San Francisco)
Nach seinem Studium in USA (Yale, Chicago) ging er nach Göttingen und promovierte dort 1933 über ein Thema aus der Mathematischen Logik (bei Bernays). Ab 1947 arbeitete er in Chicago, wo er 1952 Chairman des Mathematischen Departments wurde. Seine Arbeiten erstrecken sich über einen weiten Bereich der Mathematik. 1973-1974 war er Präsident der American Mathematical Society.

1. I. Kaplansky (ed.), *Saunders Mac Lane: Selected Papers.* (1979) Springer, Berlin-New York.

2. Saunders Mac Lane, *A Mathematical Autobiography.* (2005) A.K. Peters, Wellesley, Mass.

Magnus, Wilhelm (5.02.1907 Berlin – 15.10.1990)
Promotion 1931 in Frankfurt mit *Über unendlich diskontinuierliche Gruppen von einer definierenden Relation (der Freiheitssatz)* bei Dehn. Magnus hatte von 1933 bis 1938 eine Stelle in Frankfurt, mußte dann aber in der Industrie arbeiten wegen seiner Weigerung, der Partei beizutreten. 1947 erhielt er eine Professur in Göttingen, danach emigrierte er in die USA.

1. W. Abikoff, J.S. Birman, K. Kuiken (eds.), *The mathematical legacy of Wilhelm Magnus*, AMS Contemp. Math. **169** (1994)

2. Wilhelm Magnus: 1907–1990. Notices Amer. Math. Soc. **37** (1990), no. 10, 1372

Maier, Wilhelm Erwin Otto (4.01.1896–10.04.1990)
Promovierte 1927 in Frankfurt über *Potenzreihen irrationalen Grenzwertes* bei Siegel (sh. Crelle 156). Hasse löste gemeinsam mit Bessel-Hagen in [Jahresber. DMV 37 (1928), pp.37–41] die von Maier gestellten drei Aufgaben Nr. 53.

1. J. Böhm, *Wilhelm Maier zum 70. Geburtstag*, Forsch. Fortschr. **40** (1966), 30–31

2. J. Böhm, *Wilhelm Maier zum 70. Geburtstag*, Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena, Math.-Naturw. Reihe **14** (1965), 219–220

Manning, Henry Parker (3.10.1859–11.01.1956)
Promovierte 1891 an der Johns Hopkins University mit *Developments Obtained by Cauchy's Theorem with Applications to the Elliptic Functions.* Von 1906 bis zu seiner Emeritierung 1920 war er associate professor an der Brown University.

1. H.P. Manning, *The fourth dimension simply explained*, A collection of popular essays, with an introduction and editorial notes by *Henry P. Manning*, New York: Munn. 251 S. 8°. (1910)

Meyer, Franz Friedrich Wilhelm (2.09.1856 Magdeburg – 11.06.1934 Königsberg)
Studierte in Leipzig und Berlin; 1878 promovierte er in München über *Anwendungen der Topologie auf die Gestalten der algebraischen Curven, speziell der rationalen Curven 4. Und 5. Ordnung.* 1880 folgte die Habilitation in Tübingen, wo er bis 1888 unterrichtete. In diesem Jahr erhielt er eine Professur in Clausthal, und 1897 wechselte er nach Königsberg. Mayer war der Mitbegründer und *spiritus rector* des Unternehmens „Enzyklopädie der Mathematik“, die in 20 Bänden zwischen 1898 und 1935 erschienen.

1. B. Arndt, *Wilhelm Franz Meyer zum Gedächtnis*, Jahresbericht D. M. V. **45** (1935), 99–113

2. R. Fritsch, *Franz Meyer (1856-1934)*, in D. Rauschning et al. (eds.), Die Albertus-Universität zu Königsberg und ihre Professoren, 561–566 (1995)

Minkowski, Hermann (22.06.1864 Alexotas – 12.01.1909 Göttingen)
Studierte in Berlin und Königsberg, wo er 1885 promovierte. Danach lehrte er in Bonn, Königsberg, und Zürich. 1902 wurde Minkowski von Hilbert nach Göttingen geholt, wo er 1909 an einem durchgebrochenen Blinddarm starb.

1. J. Schwermer, *Hermann Minkowski (1864–1909)*, Rauschning et al (ed.), Die Albertus-Universität zu Königsberg und ihre Professoren, 553–560 (1995)

Mises, Richard Edler von (19.04.1883 Lemberg – 14.07.1953 Boston)
Promovierte 1907 an der Uni Wien; seine Habilitation erfolgte schon 1908 in Brünn (Brno). Danach war er von 1909 bis 1918 Professor in Strassburg, 1918 an der TH Dresden, und ab 1919 an der Universität Berlin. Von 1934 bis 1939 wirkte er an der Universität Istanbul, von 1939 bis 1953 in Harvard.

1. H. Bernhardt, *Zum Leben und Wirken des Mathematikers Richard von Mises*, NTM Schr. Geschichte Natur. Tech. Medizin **16** (1979), no. 2, 40–49

2. H. Föllmer, U. Küchler, *Richard von Mises*, in: Mathematics in Berlin, 111–116, Birkhäuser, Berlin, 1998

Mordell, Louis (28.01.1888 Philadelphia – 12.03.1972 Cambridge)
Studierte in Cambridge, und akzeptierte 1913 eine Stelle am Birkbeck College in London. 1922 wurde er Reader in Manchester, später Professor. 1945 ging er als Nachfolger von Hardy an das Trinity College in Cambridge. Bekannt wurde sein Name durch die (inzwischen bewiesene) „Mordellsche Vermutung" über die Endlichkeit der Anzahl der rationalen Punkte auf einer algebraischen Kurve von höherem Geschlecht.

1. J.W.S. Cassels, *L.J. Mordell*, Bull. London Math. Soc. **6** (1974), 69–96

Nehrkorn, Harald
Promotion 1933 in Hamburg bei Artin mit *Über Absolute Idealklassengruppen und Einheiten in algebraischen Zahlkörpern.*

Neugebauer, Otto (26.05.1899 Innsbruck – 19.02.1990)
Promovierte 1926 in Göttingen über *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung* bei Courant und Hilbert. Neugebauer ist weltbekannt als Mathematikhistoriker, und war auch Gründer des Zentralblatts und der Mathematical Reviews.

1. Ph. J. Davis, *Otto Neugebauer: reminiscences and appreciation*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), no. 2, 129–131

2. D. Pingree, David *In memoriam: Otto Neugebauer (1899–1990)*, Arch. Internat. Hist. Sci. **40** (1990), no. 124, 82–84

von Neumann, John Ludwig (28.12.1903 Budapest – 8.02.1957 Washington)
Besuchte das Gymnasium in Budapest und veröffentlichte seinen ersten mathematischen Artikel noch als Schüler. Danach studierte er an zahlreichen Universitäten Europas. Promotion 1926 an der Eötvös Lorand University bei Fejér; danach Privatdozent in Berlin. 1930 wurde er Lecturer, 1931 Professor für mathematische Physik in Princeton; ab 1933 arbeitete er am Institute for Advanced Study.

1. H. Baumgärtel, E. Schmidt, *John von Neumann*, Mathematics in Berlin, 97–104, Birkhäuser, Berlin, 1998

2. T. Legendi, T. Szentivanyi, *Leben und Werk von John von Neumann*, BI Mannheim, 1983. 151 pp

Nevanlinna, Rolf (22.10.1895 Joensuu – 28.05.1980 Helsinki)
Promotion 1919 in Helsinki bei Lindelöf mit *Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen.* Ab 1922 war er Dozent in Helsinki, ab 1926 Professor. 1924 besuchte er Göttingen auf Einladung von Landau. 1936/37 war er auf Vorschlag von Hasse als Gastprofessor in Göttingen; einen Ruf nach Göttingen schlug er jedoch aus. 1946–1963 war er als Professor an der ETH Zürich tätig, gleichzeitig jedoch war er Mitglied der finnischen Akademie. 1959–1962 war er Präsidient der Internationalen Mathematischen Union.

1. L. Ahlfors, *Das mathematische Schaffen Rolf Nevanlinnas*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **2** (1976), 1–15
2. W. K. Hayman, *Rolf Nevanlinna*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 5, 419–436

Noether, Fritz (7.10.1884 – 10.09.1941)
Bruder von Emmy Noether. Promovierte 1909 in München mit *Über rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen.* 1922 bis 1934 war er an der Technischen Hochschule in Breslau, danach emigrierte er nach Tomsk (UdSSR). Als angeblicher Spion für Deutschland wurde er 1937 verhaftet und 1941 wegen antisowjetischer Propaganda zum Tode verurteilt und hingerichtet.

1. G.E. Noether, *Letter to the editor: „Fritz Noether (1884–194?)“* Integral Equations Operator Theory **13** (1990), no. 2, 303–305
2. G.E. Noether, *Fritz Noether (1884–194?)*, Integral Equations Operator Theory **8** (1985), no. 5, 573–576
3. K.-H. Schlote, *Fritz Noether—Opfer zweier Diktaturen. Tod und Rehabilitierung*, NTM Schr. Geschichte Natur. Tech. Medizin **28** (1991), no. 1, 33–41

Noether, Max (24.09.1844 Mannheim – 13.12.1921 Erlangen)
Vater von Emmy Noether. Studierte in Heidelberg (mit Gastsemestern in Giessen und Göttingen), wo er 1868 bei O. Hesse und G. Kirchhoff promovierte. Die Habilitation erfolgte 1870 in Heidelberg, wo er 1874 eine Professorenstelle erhielt. 1875 wechselte er nach Erlangen, und am 28.08.1880 heiratete er Ida Amalie Kaufmann (1852–1915).

1. A. Brill, *Nachruf*, Jahresbericht der DMV **32** (1923), 211–233

Ore, Öystein (7.10.1899 Kristiania – 13.08.1968 Oslo)
Während seines Studiums in Oslo hielt er sich auch einige Zeit in Göttingen auf und geriet unter den Einfluss von Emmy Noether, der lebenslang anhielt. Promovierte 1924 in Oslo bei Skolem mit einer Arbeit *Zur Theorie der algebraischen Körper*; 1926 erhielt er eine Professur in Oslo und ging 1927 nach Yale, wo er 1931 zum Sterling Professor ernannt wurde. Er behielt diese Position bis 1968, mit häufigen Besuchen in Norwegen.

1. *Oystein Ore (1899–1968)*, J. Combinatorial Theory **8** (1970), i–iii

Ostrowski, Alexander (25.09.1893 Kiev –20.11.1986 Montagnola, Lugano)
Ostrowski besuchte als Schüler Graves Seminar an der Universität Kiew, wurde aber nach seinem Schulabschluss an keiner russischen Universität zum Studium zugelassen. Daraufhin ging er zu Hensel nach Marburg; während des ersten Weltkriegs war er als „feindlicher Ausländer“ gezwungen, in Marburg zu bleiben, und ging 1918 nach Göttingen, wo er 1920 mit *Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen* bei Landau und Klein promovierte. Seine Habilitation erfolgte 1922 bei Hecke in Hamburg; danach war er Privatdozent in Göttingen. Nach einem Aufenthalt in England 1925/26 erhielt er einen Ruf an die Universität Basel.

1. M. Eichler, *Alexander Ostrowski. Über sein Leben und Werk*, Acta Arith. **51** (1988), 295–298

Petri, Karl
Promotion 1904 in München bei Lindemann mit *Über die in der Theorie der ternären kubischen Formen auftretenden Konnexe.*

Pietrkowski, Stephan
Promovierte 1931 in Erlangen über die *Theorie der unendlichen Abelschen Gruppen.* Gründete 1932 zusammen mit anderen die „Linke Studentengruppe Erlangen“.

Pollaczek-Geiringer, Hilda (28.09.1893 Wien – 22.03.1973 Santa Barbara, CA)
Promotion 1917 in Wien über *Trigonometrische Doppelreihen* bei Wirtinger. 1921 heiratete sie Felix Pollaczek (1892–1981). Ihr Doktorvater von Mises wanderte Ende 1933 nach Istanbul aus, wohin sie ihm 1934 folgte. 1939 geht von Mises in die USA aus; sie folgt ihm 1940 und heiratet ihn 1943.

1. J.L. Richards, *Hilda Geiringer von Mises (1893–1973)*, Women of mathematics, 41–46, Greenwood, Westport, CT, 1987

2. R. Siegmund-Schultze, *Hilda Geiringer-von Mises, Charlier series, ideology, and the human side of the emancipation of applied mathematics at the University of Berlin during the 1920s*, Historia Math. **20** (1993), no. 4, 364–381

Prüfer, Ernst Paul Heinz (10.11.1896 Wilhelmshaven – 4.04.1934 Münster)
Promovierte 1921 in Berlin über *Unendliche Abelsche Gruppen von Elementen endlicher Ordnung* bei Schur. Danach war er Assistent bei Koebe in Jena, erhielt 1923 die venia legendi, und war 1927–1934 Professor in Münster.

1. H. Behnke, H.; G. Köthe, *Heinz Prüfer*, Jahresbericht D. M. V. **45** (1935), 32–40

2. A. Mader, *Heinz Prüfer and his papers on abelian groups*, Abelian group theory (Oberwolfach, 1985), 1–8, New York, 1987.

Rabinowitsch, Georg Yuri (Rainich) (25.03.1886 – 10.10.1968)
Er studierte in Odessa, Göttingen und München, und promovierte 1913 an der Universität Kazan. Er lehrte dann in Kazan und Odessa, und wanderte 1922 in die USA aus, wo er den Namen Ranich annahm. Von 1923 bis 1926 war er an der Johns Hopkins Universität, danach lehrte er bis zu seiner Emeritierung in Michigan. Danach ging er als Gastprofessor nach Notre Dame, kehrte aber nach dem Tod seiner Frau 1963 nach Michigan zurück.

Rademacher, Hans (3.04.1892 Wandsbeck – 7.02.1969 Haverford)
Promovierte 1916 in Göttingen über *Eindeutige Abbildungen und Messbarkeit* bei Carathéodory. Danach war er kurzzeitig Lehrer in Thüringen, ab Dezember 1916 Privatdozent an der Universität Berlin, 1922 a.o. Professor an der Universität Hamburg, ab 1926 o. Prof. Universität Breslau. Im Februar 1934 wurde er ohne Angabe von Gründen entlassen, vermutlich weil er der „Liga für Menschenrechte“ angehört hatte. Er emigrierte in die USA, zuerst an das Swarthmore College, dann an die University of Pennsylvania.

1. B.C. Berndt, *Hans Rademacher (1892–1969)*, Acta Arith. **61** (1992), no. 3, 209–225
2. B.C. Berndt, *Hans Rademacher (1892–1969)*, The Rademacher legacy to mathematics (University Park, PA, 1992), xiii–xxxvi, Contemp. Math., 166, AMS 1994

Rauter, Herbert (10.01.1899 – 23.01.1986)
Promovierte 1926 in Halle mit *Über die Darstellbarkeit durch quadratische Formen im Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten* bei Hasse. Studienrat in Marienburg (Westpr) bis 1945.

Reidemeister, Kurt (13.10.1893 Braunschweig – 8.07.1971 Göttingen)
Studierte bei Landau und Hecke, und promovierte 1921 in Hamburg mit *Über die Relativklassenzahl gewisser relativ-quadratischer Zahlkörper* bei Hecke. 1923 erhielt er eine Stelle an der Universität Wien, 1927 in Königsberg; diese Stelle verlor er 1933 nach der Machtergreifung, konnte aber in Marburg weiterarbeiten.

1. M. Epple, *Kurt Reidemeister (1893-1971)*, in D. Rauschning et al. (eds.) Jahrbuch der Albertus-Universität zu Königsberg. 567–575 (1995)
2. H.-Ch. Reichel, *Kurt Reidemeister (1893 bis 1971) als Mathematiker und Philosoph – ein „Meilenstein“ in der Entwicklung der Topologie, der Geometrie und der Philosophie dieses Jahrhunderts*, Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. **203** (1994), 117–135

Rellich, Franz (14.09.1906 Tramin/Südtirol – 25.09.1955 Göttingen)
Studierte 1924-29 in Graz, war 1928 Assistent in Göttingen, promovierte 1929 bei Courant mit *Verallgemeinerung der Riemannschen Integrationsmethode auf Differentialgleichungen n-ter Ordnung in zwei Veränderlichen.* Er wurde 1933 Privatdozent in Göttingen, wo er wegen seiner Ablehnung der Nationalsozialisten

entlassen wurde. Ab 1934 arbeitete er als Privatdozent in Marburg, und war ab 1942 Professor an der TH Dresden, ab 1946 in Göttingen.

Remak, Robert (14.02.1888 – 1942 Auschwitz)
Promovierte 1911 in Berlin mit *Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren* bei Frobenius und H. Schwarz. Die Habilitation erfolgte 1929, er erhielt jedoch keine offizielle Lehrstelle an der Universität. In der Kristallnacht (Nov. 1938) wurde er verhaftet und nach acht Wochen wieder aus dem KZ Sachsenhausen entlassen; er floh 1939 nach Amsterdam und wurde 1942 nach Auschwitz deportiert, wo er noch im selben Jahr starb.

1. U.C. Merzbach, *Robert Remak and the estimation of units and regulators*, Amphora, 481–522, Birkhäuser, Basel, 1992

Riemann, Bernhard (17.09.1826 Breselenz – 20.07.1866 Selasca)
Nahm 1846 sein Studium in Göttingen auf, wechselte 1847 nach Berlin, kehrte 1849 nach Göttingen zurück und promovierte dort 1851 bei Gauss. Er erhielt dort eine Stelle und habilitierte sich 1854 mit dem berühmten Vortrag *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Er erhielt 1857 eine Professur in Göttingen. Den Winter 1862/63 verbrachte er in Sizilien; in den darauffolgenden Jahren kehrte er immer wieder aus gesundheitlichen Gründen nach Italien zurück, wo er dann auch starb.

1. D. Haftendorn, *Riemann als Schüler am Johanneum zu Lüneburg*, Gauss-Ges. Göttingen Mitt. **36** (1999), 21–28

Rogosinski, Werner Wolfgang (24.09.1894 – 23.07.1964)
Promovierte 1922 in Göttingen über *Neue Anwendung der Pfeifferschen Methode bei Dirichlets Teilerproblem* bei E. Landau. Verlor 1936 die venia legendi und arbeitete 1936–1937 als Lehrer an jüdischen Gymnasien in Berlin. Emigrierte 1937 nach England (Cambridge), und war 1948–1959 Professor an der University of Durham in Newcastle, und 1959–1964 Gastprofessor in Aarhus.

Rothe, Erich Hans (21.07.1895 –)
Promovierte 1926 in Berlin mit *Über einige Analogien zwischen linearen partiellen und linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen* bei E. Schmidt und R. von Mises. Von 1931 bis 1935 war er Privatdozent in Breslau, von 1937 bis 1943 am Penn College Oskaloosa/Iowa, und ab 1943 assistant professor, ab 1949 associate professor und ab 1955 professor in Ann Arbor.

1. L. Cesari, R. Kannan, H.F. Weinberger (eds.), *Nonlinear analysis. A collection of papers in honor of Erich H. Rothe*, Academic Press 1978

2. W. Kaplan, *A tribute to Erich H. Rothe*, J. Math. Anal. Appl. **12** (1965), 380–381

Rusam, Friedrich
Promovierte 1934 in Erlangen über *Matrizenringe mit Koeffizienten aus endlichen Ringen ganzer Zahlen* bei W. Krull.

Schilling, Otto (3.11.1911 Apolda – 20.6.1973 West Lafayette (Purdue))
Studierte in Göttingen bei Emmy Noether. Promotion 1934 in Marburg bei Hasse mit *Über gewisse Beziehungen zwischen der Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme und algebraischer Zahlkörper.* Auf Empfehlung von Hasse wurde er 1935 von dem Institute for Advanced Study in Princeton angenommen. 1937-39 Fellow an der Johns Hopkins University, 1939-61 University of Chicago (sponsored by A.,A. Albert), ab 1961 Professor an der Purdue Universität in Indiana (USA). Schrieb 1950 ein Buch über *The Theory of Valuations.*

Schmid, Hermann Ludwig (26.06.1908 Göggingen – 16.04.1956 Würzburg)
Studierte von 1927 bis 1932 in München, wo er 1932 und 1933 die erste und zweite Staatsprüfung für das höhere Lehramt ablegte. Während seiner Lehrtätigkeit 1933 – 1935 promovierte er 1934 in Marburg mit *Über das Reziprozitätsgesetz in relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörpern mit endlichem Konstantenkörper* bei Hasse. Danach war er bis 1937 Assistent in Göttingen. 1939 folgt die Habilitation in Gießen; 1940 wird er Dozent in Berlin, 1946 erhält er dort eine Professur. 1953 schließlich wechselt er an die Universität Würzburg.

1. H. Hasse, *Wissenschaftlicher Nachruf auf Hermann Ludwig Schmid*, Math. Nachr. **18**, H. L. Schmid-Gedächtnisband, 1–18 (1958)

2. W. Jehne, E. Lamprecht, *Helmut Hasse, Hermann Ludwig Schmid and their students in Berlin*, Mathematics in Berlin, 143–149, Birkhäuser, Berlin, 1998

Schmidt, Friedrich Karl (22.09.1901 Düsseldorf – 25.1.1977 Heidelberg)
Studierte in Marburg und Freiburg, wo er 1925 über em Allgemeine Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen bei A. Loewy promovierte. Ab 1927 ist er Privatdozent in Erlangen, 1933/34 Dozent in Göttingen, ab 1934 Professor in Jena, ab 1946 in Münster, und ab 1952 in Heidelberg. Dazwischen arbeitete er von 1941 bis 1945 an der deutschen Versuchsanstalt für Segelflug in Reichenhall.

1. E. Kunz, H.-J. Nastold, *In memoriam Friedrich Karl Schmidt*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **83** (1981), no. 4, 169–181.

2. D. Puppe, *Friedrich Karl Schmidt 22.9.1901–25.1.1977*, Jbuch. Heidelberger Akad. Wiss. 1978, 66–68 (1979)

Schmidt, Otto Yulevich (1891–1956)
Polarforscher und Mathematiker. Sein Name ist bekannt durch den „Satz von Krull-Remak-Schmidt“ über direkte Zerlegungen von Gruppen. Ihm wurde 1966 eine Briefmarke in der Sowjetunion gewidmet.

1. L.V. Matveeva, *Otto Yul'evich Schmidt. 1891–1956* (Russ.) Nauka, Moskau, 1993. 206 pp

Scholz, Arnold (24.12.1904 Berlin-Charlottenburg – 1.02.1942 Flensburg)
Studium in Berlin (bei I. Schur) und ein Semester in Wien (bei Furtwängler).

Promotion 1928 in Berlin mit *Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer Gruppe.* 1930 Privatdozent Freiburg, 1935 Lehrauftrag Univ. Kiel, 1941 Lehrer an der Marine-Akademie Flensburg-Mürwick. Sein Arbeitsgebiet war die Zahlentheorie. Er pflegte einen ausführlichen Briefwechsel mit Hasse. Sein Göschen-Bändchen über elementare Zahlentheorie hat weite Verbreitung gefunden.

1. O. Taussky-Todd, Math. Nachr. **7** (1952), 379–386

Schur, Issai (10.01.1875 Mogilyov – 10.01.1941 Tel Aviv)
Begann sein Studium 1894 in Berlin, wo er 1901 *Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen* bei Frobenius und L. Fuchs promovierte. 1909 erhielt er einen Lehrauftrag in Berlin, 1911 eine Professur in Bonn. 1916 kehrte er nach Berlin zurück; 1933 verlor er seinen Lehrauftrag und wurde 1935 zwangsemeritiert. Daraufhin ging er nach England, und 1939 wanderte er nach Palästina aus.

1. A. Brauer, *Eine Bemerkung zum Vornamen Schurs*, Jber. Deutsch. Math.-Verein. **77** (1976), no. 4, 165–166

2. W. Ledermann, *Issai Schur and his school in Berlin*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), no. 2, 97–106

Schwarz, Ludwig
Dissertation Göttingen 1933 mit *Zur Theorie des nichtkommutativen Polynombereichs und Quotientenrings* Die Dissertation war von Emmy Noether angeregt worden und wurde auch noch von ihr begutachtet. Offiziell fungierten jedoch H. Weyl und G. Herglotz als Gutachter.

Scorza, Bernardino Gaetano (29.09.1876 – 06.08.1939)
Studierte in Pisa mit Bertini und Bianchi; danach Lehrer, ab 1909 Mitherausgeber der Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Lehrte Geometrie in Cagliari (ab 1912), Parma (ab 1913), Catania (ab 1916), Napoli (ab 1921) und Rom (ab 1934). Arbeitete in der algebraischen Geometrie.

1. E. Bompiani, *Gaetano Scorza* (Italian), Rend. Sem. mat. Univ. Roma (4) **3** (1939), 139–152

2. F. Severi, *L'opera scientifica di Gaetano Scorza* (Italian), Ann. Mat. pura appl., Bologna, (4) **20** (1941), 1–20

Shoda, Kenjiro (25.02.1902 Tatebayashi – 20.03.1977 Ashikaga)
Studierte an der Tokyo Imperial University, und besuchte 1926 Schur in Berlin, 1927 Emmy Noether in Göttingen. Er kehrte 1929 nach Japan zurück und begann, ein Lehrbuch der Algebra zu schreiben, das 1932 erschien. 1933 erhielt er eine Professur in Osaka.

1. H. Nagao, *Kenjiro Shoda (1902 - 1977)*, Osaka J. Math. **15** (1978), 1–5

Siegel, Carl Ludwig (31.12.1896 Berlin – 4.04.1981 Göttingen)
Begann 1915 sein Studium in Berlin, wurde aber wenig später einberufen. 1919 setzte er sein Studium in Göttingen fort, wo er 1920 bei Landau mit *Approximation algebraischer Zahlen* promovierte. Bereits 1921 erhielt er die venia legendi und wurde 1922 als ordentlicher Professor nach Frankfurt berufen. 1938 ging Siegel nach Göttingen, von wo aus er 1940 über Dänemark und Norwegen in die USA emigrierte. Dort arbeitete er am Institute for Advanced Study in Princeton, bis er 1951 nach Göttingen zurückberufen wurde.

1. J. Dieudonné, *Carl Ludwig Siegel*, C. R. Acad. Sci. Paris Vie Académique **296** (1983), suppl. 16, 63–75

2. M. Deuring, *Carl Ludwig Siegel, December 12, 1896–April 4, 1981*, Acta Arith. **45** (1985), no. 2, 93–113

Skolem, Thoralf (23.05.1887 Sandsvaer, 23.03.1963 Oslo)
Nahm 1905 sein Studium in Kristiana (Oslo) auf und wurde 1909 Assistent des Physikers Kristian Birkeland. Im Wintersemester 1915 studierte er Mathematik in Göttingen, und wurde 1918 Dozent in Kristiana. Skolem entschied sich dann, doch noch zu promovieren, und reichte dazu 1926 sein Dissertation *Einige Sätze über ganzzahlige Lösungen gewisser Gleichungen und Ungleichungen* ein; offizieller Doktorvater war der 1922 verstorbene Thue.

1. J.E. Fenstad, *Thoralf Albert Skolem 1887–1963: a biographical sketch*, Nordic J. Philos. Logic **1** (1996), no. 2, 99–106

2. T. Nagell, *Thoralf Skolem in memoriam (1887-1963)*, Acta Math. **110** (1963), I-XI, 303

Speiser, Andreas (10.6.1885 - 12.10.1970)
Promovierte 1909 in Göttingen mit *Zur Theorie der binären quadratischen Formen mit Koeffizienten und Unbestimmten in einem beliebigen Zahlkörper* bei Hilbert. Sein Lehrbuch über Gruppentheorie war weithin bekannt. Er arrangierte die deutsche Übersetzung des Buches von Dickson „Algebren und ihre Zahlentheorie“ und schrieb dazu einen Anhang über die Idealtheorie in Maximalordnungen.

1. M. Eichler, *Andreas Speiser, 1885-1970*, Verhdl. Schweizer. naturforsch. Ges. **150** (1970), 325–327

2. J.O. Fleckenstein, B.L. van der Waerden, *Zum Gedenken an Andreas Speiser*, Elem. Math. **26** (1971), 97–102

Springer, Ferdinand (1881 - 1965)
Er übernahm 1907 den Verlag von seinem Vater (der ebenfalls Ferdinand hieß). Er gründete 1918 die Mathematische Zeitschrift und übernahm 1920 vom Teubner-Verlag die Mathematischen Annalen.

1. H. Sarkowski, *Der Springer-Verlag, Stationen seiner Geschichte. Teil I, II.* Heidelberg 1992

Stauffer, Ruth (1910 - ??)
Ph.D. Bryn Mawr (1935) bei Emmy Noether: *The Construction of a Normal Basis in a Separable Normal Extension Field*

1. J.C. Oxtoby, Ruth Stauffer McKee, *Anna Pell Wheeler*, Bryn Mawr Alumnae Bulletin (1966) 14–16

Steinitz, Ernst (13.06.1871 Laurahütte (Schlesien) – 29.09.1928 Kiel)
Steinitz begann sein Studium 1890 in Breslau, ging 1891 für zwei Jahre nach Berlin, und promovierte nach seiner Rückkehr 1894 *Über die Konstruction der Configurationen* n_3 bei Jacob Rosanes. Danach ging er als Privatdozent an die TH Berlin-Charlottenburg. 1910 ging er nach Breslau zurück, 1920 nach Kiel. 1928 erkrankte er an einem unheilbaren Herzleiden. Steinitz war jüdisch; seine Frau kam während der Nazizeit ums Leben, seinem Sohn gelang die Flucht nach Palästina.

1. K. Johnsen, *On a forgotten note by Ernst Steinitz on the theory of abelian groups*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 4, 353–355

Stepanoff, Vyacheslaw Vassilievich (4.09.[23.08.]1889 Smolensk – 22.07.1950 Moskau)
Begann 1908 sein Studium in Moskau, wo er 1915 bei Dimitri Egorov promovierte und anschliessend eine Dozentenstelle erhielt. Er war, wie Noether schreibt, 1927 in Goettingen.

Suetuna, Zyoiti (28.11.1898 Kunisaki – 6.08.1970 Tokyo)
Er begann sein Studium 1919 in Tokyo und arbeitete ab 1922 als Dozent an der Kyushu Universität. 1924 kehrte er an die Universität Tokyo zurück. 1927 ging er für zwei Jahre nach Göttingen, 1929 nach Hamburg zu Artin, und kehrte 1931 nach Japan zurück. Als Takagi 1936 in den Ruhestand geht, wird Suetuna auf seine Stelle berufen.

1. T. Chitsusawa, *Works of Zyoiti Suétuna* (Japanese) Sûgaku **23** (1971), no. 1, 49–53

2. K. Matusita, *Zyoiti Suetuna, 1898-1970*, Ann. Inst. Stat. Math. **22** (1970), 401–402

Sylow, Peter Ludwig Mejdell (12.12.1832 Kristiana – 7.09.1918 Kristiana)
Nach seinem Studium an der Universität von Kristiana arbeitete Sylow als Lehrer in Frederikshald von 1858 bis 1898. 1861 reiste er mit einem Stipendium nach Berlin und Paris, und vertrat 1862 Broch an der Universität von Kristiana. Er gab Abels gesammelten Werke heraus, wurde Mitherausgeber der Acta Mathematica, und erhielt 1894 einen Ehrendoktortitel von der Universität Kopenhagen.

Szegö, Gabor (20.01.1895 Kunhegyes – 7.08.1985 Palo Alto)
Er studierte in Budapest, Berlin und Göttingen und nahm auf der Seite von Österreich-Ungarn am ersten Weltkrieg teil. Er promovierte 1918 in Wien mit *Ein Grenzwertsatz über die Toeplitz Determinanten einer reellen Funktion* bei Fejer. 1921 ging er nach Berlin, 1926 erhielt er eine Professur in Königsberg. 1934 emigrierte er in die USA, wo er in St. Louis und ab 1938 in Stanford arbeitete.

1. R. Askey, P. Nevai, *Gabor Szegö: 1895–1985*, Math. Intelligencer **18** (1996), no. 3, 10–22

Takagi, Teiji (21.04.1875 Kazuya Village – 29.02.1960 Tokyo)
Studierte an der Tokyo Imperial University, und besuchte 1898 Berlin und Göttingen, wo er bei Hilbert seine Doktorarbeit *Über die im Bereich der rationalen complexen Zahlen Abel'schen Zahlkörper* schrieb, welche er nach seiner Rückkehr 1903 in Tokyo einreichte. Er wurde 1900 in Abwesenheit zum associate professor in Tokyo ernannt, und erhielt 1904 eine volle Professur. 1920 nahm er am ICM in Straßburg, 1932 am ICM in Zürich teil. Zusammen mit Toshi Tani, die er 1902 heiratete, hatte er drei Söhne und fünf Töchter.

1. K. Honda, *Teiji Takagi: a biography—on the 100th anniversary of his birth*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **24** (1975/76), no. 2, 141–167

2. S. Iyanaga, *Memories of Professor Teiji Takagi [1875–1960]*, Class field theory—its centenary and prospect (Tokyo, 1998), 1–11, Adv. Stud. Pure Math., 30, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001

Taussky, Olga (30.8.1906 Olmütz – 7.10.1995 Pasadena)
Ehefrau von John Todd. Studierte von 1925 bis 1929 in Wien, wo sie 1930 *Über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes* bei Furtwängler promovierte. Von 1931 bis 1934 war sie Assistentin in Göttingen und Wien, danach ging sie nach Bryn Mawr, war von 1937 bis 1944 Lecturer in London, von 1947 bis 1957 im National Bureau of Standards Washington, ab 1957 am California Institute of Technology in Pasadena.

1. E. Hlawka, *Olga Taussky-Todd, 1906–1995*, Monatsh. Math. **123** (1997), no. 3, 189–201

2. H. Kisilevsky, *Olga Taussky-Todd's work in class field theory*, Pac. J. Math., Spec. Issue, 219–224 (1998)

Todd, John Arthur (23.08.1908 Liverpool – 22.12.1994 Croydon)
Ehemann von Olga Taussky-Todd. Studierte am Trinity College in Cambridge, ging 1931 als assistant lecturer nach Manchester, wo er 1932 promovierte. 1937 ging er als Lecturer nach Cambridge zurück, und war dort von 1960 bis 1973 Reader.

1. M.F. Atiyah, *Obituary: John Arthur Todd*, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), 305–316

Toeplitz, Otto: (1.08.1881 Breslau – 15.02.1940 Jerusalem)
Promovierte 1905 in Breslau *Über Systeme von Formen, deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet* bei Rosanes und Sturm. 1913 – 1928 Professor in Kiel. 1928 akzeptierte er einen Ruf nach Bonn, wurde dort 1935 in den Ruhestand versetzt. 1935 schreibt er an Courant:

> „*Denn dies ist meine Auffassung: wir müssen die Stellen, auf denen man uns lässt, bis zum letzten Augenblick halten, nicht als ob eine Besserung in Sicht wäre – ausgeschlossen – sondern weil wir sonst in irgend einer Form der allgemeinen Judenheit zur Last fallen, mindestens einem anderen die Stellen wegnehmen. Ich betrachte es als ein Opfer, das ich der Judenheit bringe, auf diesem Posten auszuhalten.*“

Anfang 1939 emigrierte er dann nach Jerusalem, starb aber wenig später.

1. S. Hildebrandt, P.D. Lax, *Otto Toeplitz*, Bonner Mathematische Schriften 319. Bonn, 1999. 211 pp
2. G. Köthe, *In memory of Otto Toeplitz*, Toeplitz centennial (Tel Aviv, 1981), pp. 545–556, Operator Theory: Adv. Appl., 4, Birkhäuser 1982

Tschebotareff, Nikolay Grigorievich (15.06.1894 Kamenets-Podolsk – 2.07.1947 Moskau)
Studierte ab 1912 in Kiew bei Grave. 1925 besuchte er die DMV-Tagung in Danzig, danach Berlin und Göttingen. Ph. D. Kiev (Grave)

1. P. Stevenhagen, H.W. Lenstra, *Chebotarev and his density theorem*, Math. Intelligencer **18** (1996), no. 2, 26–37
2. *In memoriam Gleb Alexandrovich Chebotarev (1913–1975)*, Celestial Mech. **12** (1975), no. 4, 395–396.

Tsen, Chiungtze (1898–1940)
1929 – 1934 studierte er in Göttingen, vornehmlich bei Emmy Noether. Promovierte 1934 in Göttingen über *Algebren über Funktionenkörpern* bei Emmy Noether und F.K. Schmidt. Danach ging er für ein Jahr nach Hamburg zu Artin. 1935 kehrte er nach China zurück.

1. S. Ding, M.-Ch. Kang, E.-T. Tan, *Chiungtze C. Tsen (1898–1940) and Tsen's theorems*, Rocky Mountain J. Math. **29** (1999) 1237–1269

Ullrich, Egon (1.11.1902 Wien – 30.05.1957 Giessen)
Promovierte 1925 in Graz mit *Über Korrespondenz von Limitierungsverfahren* bei Rella und von Sterneck. Während eines Gastaufenthalts in Helsinki entstand eine enge Freundschaft mit Nevanlinna. 1934 holte ihn Hasse als Assistent nach Göttingen, als Vertreter der Funktionentheorie. 1937 wurde er Professor in Giessen, 1947 Gastprofessor in Mainz, 1948 in Tübingen.

1. R. Nevanlinna, H. Wittich, *Egon Ullrich in memoriam*, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **61** (1958), 57–65

Ulm, Helmut (21.06.1908 Gelsenkirchen –)
Studierte 1926–1930 in Göttingen, Jena und Bonn; dort promovierte er 1930, und wurde 1947 als Professor an die Universität Münster berufen.

1. R. Göbel, *Helmut Ulm: His work and its impact on recent mathematics*, Contemporary mathematics AMS **87** (1989), 1 - 10

Vandiver, Harry Schultz (21.10.1882 Philadelphia – 4.01.1973 Austin)
Verließ die high school ohne Abschluß und arbeitete von 1919 bis 1924 als instructor an der Cornell University. Danach war er bis 1934 Professor an der University of Austin, Texas, und 1934 Gastprofessor in Princeton. Er veröffentlichte 174 Arbeiten, erhielt 1931 den Cole Preis, und 1945 die Ehrendoktorwürde von der University of Pennsylvania.

1. D.H. Lehmer, *Harry Schultz Vandiver, 1822–1973*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 817–818

Veblen, Oswald (24.06.1880 Decorah –10.08.1960 Brooklyn)
Ph. D. Chicago 1903, *A System of Axioms for Geometry* (E. H. Moore). War von 1910 bis 1932 Professor in Princeton, und arbeitete von 1932 bis 1950 am Institute for Advanced Study in Princeton.

1. W.V.D. Hodge, *Oswald Veblen (1880-1960)*, J. Lond. Math. Soc. **36** (1961), 507–510

2. K.H. Parshall, *In pursuit of the finite division algebra theorem and beyond: Joseph H. M. Wedderburn, Leonard E. Dickson, and Oswald Veblen*, Arch. Int. Hist. Sci. **33** (1983), 274–299

Vorbeck, Werner
Promovierte 1935 in Göttingen über *Nichtgaloissche Zerfällungskörper einfacher Systeme* bei Emmy Noether.

van der Waerden, Bartel (2.02.1903 Amsterdam – 12.1.1996 Zürich)
Promovierte 1926 in Amsterdam mit *De algebraiese grondslagen der meetkunde van het aantal* bei H. de Vries. 1928 erhielt er eine Professur in Groningen, ging 1931 nach Leipzig, 1945 Gast-Professor an der Johns Hopkins University in Baltimore. Von 1948 bis 1951 arbeitete er in Amsterdam, danach an der Universität Zürich.

1. J.H. de Boer, *van der Waerden's foundations of algebraic geometry*, Nieuw Arch. Wisk. (4) **12** (1994), no. 3, 159–168

2. B.L. van der Waerden, *Meine Göttinger Lehrjahre*, With an epilogue by Peter Roquette. Mitt. Dtsch. Math.-Ver. 1997, no. **2**, 20–27

Wahlin, George E.
Ph. D. Yale University 1906, *The Relation Between the Binary Quadratic Forms and the Quadratic Numerical Bodies.*

Walther, Alwin (6.05.1898 Dresden-Reick – 04.01.1967)
Promovierte 1922 in Dresden mit *Beiträge zur Funktionentheorie* bei Gerhard Kowalewski.

1. L. Collatz, *Alwin Walther. 6. Mai 1898–4. Januar 1967*, Z. Angew. Math. Mech. **47** (1967), 213–215
2. H. Schwetlick, *Alwin Walther (6. Mai 1898–4. Januar 1967): Ein Pionier des wissenschaftlichen Rechnens)*, ZAMM, Z. Angew. Math. Mech. **80** (2000), No.1, 5–8

Wang, Shianghaw
Ph.D. Princeton University 1949, On Grunwald's Theorem (Emil Artin)

Ward, Morgan (20.08.1901–26.06.1963)
Arbeitete von 1926 bis 1963 am California Institute of Technology in Pasadena, wo er 1928 mit *The Foundations of General Arithmetic* bei E. Bell promovierte. Der Mitschrieb von Siegels 'Lectures on the analytical theory of quadratic forms' (1934/35) am Institute of Advanced Study in Princeton stammt von ihm.

1. D.H. Lehmer, *The mathematical work of Morgan Ward*, Math. Comp. **61** (1993), 307–311

Weber, Werner (3.01.1906 Oberstein/Nahe –)
Promovierte 1929 in Göttingen mit *Idealtheoretische Deutung der Darstellbarkeit beliebiger natürlicher Zahlen durch quadratische Formen* bei Emmy Noether und E. Landau. Danach war er Assistent bei Landau, ab 1931 Privatdozent und ab 1935 Dozent in Göttingen, und wurde schließlich 1936 auf Betreiben von Bieberbach Nachfolger von Schur an der Universität Berlin. Dort wurde er 1945 entlassen, arbeitete 1946 als Verlagskorrektor, und war ab 1951 wissenschaftlicher Lehrer am Institut Dr. Brechtefeld in Hamburg.

Wedderburn, Joseph Henry Maclagan (26.02.1882–3.10.1948)
Erhielt seinen Ph.D. 1908 in Edinburgh mit *On Hypercomplex Numbers* (G. Chrystal). Danach war er ab 1909 assistant professor, ab 1921 associate professor, und von 1928 bis 1945 Professor an der Princeton University.

1. K.H. Parshall, *New light on the life and work of Joseph Henry Maclagan Wedderburn (1882–1948)*, Demidov, S. S. (ed.) et al., Amphora. Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag, Birkhäuser (1992) 523–537
2. K.H. Parshall, *Joseph H. M. Wedderburn and the structure theory of algebras*, Arch. Hist. Exact Sci. **32** (1985), 223–349

Wegner, Udo (4.06.1902-1989)
Promovierte 1928 mit *Über die ganzzahligen Polynome, die für unendlich viele Primzahlmoduln Permutationen liefern* (Schur, Bieberbach). Wegner wurde 1931 Professor an der TH Darmstadt, arbeitete 1937–1945 als Professor an der Universität Heidelberg, und 1946–49 im Office National d'Études et de Recherches Aéronaut. in Paris. 1951 erhielt er einen Lehrauftrag an der TH Darmstadt, 1952 an der TH Karlsruhe, und wurde 1956 als Professor an die Universität Saarbrücken berufen.

1. U. Wegner, *Beiträge zur Mechanik*, Festschrift für Udo Wegner, Stuttgart 1972, 278 S.

Weil, André (06.05.1906 Paris – 06.08.1998 Princeton)
Studierte an der ENS Paris, besuchte Rom und Göttingen, und promovierte 1928 bei Hadamard. Danach lehrte er an diversen Universitäten, unter anderem in Indien, und ab 1933 in Straßburg. Nach seiner Emigration in die USA unterrichtete er in Haverford und Swarthmore, 1945 in Sao Paulo, bis er 1947 an die Universität Chicago berufen wurde. 1958 wechselte er an das Institute for Advanced Study in Princeton.

1. J.-P. Serre, *La vie et l'œuvre d'André Weil*, Enseign. Math. (2) **45** (1999), no. 1-2, 5–16

2. A. Weil, *Souvenirs d'apprentissage*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991; Engl. Transl. 1992

Weitzenböck, Roland (26.05.1885–24.07.1955)
Promovierte 1910 mit *Zum System von 3 Strahlenkomplexen im 4-dimensionalen Raum*; seine Habilitation erfolgte mit *Über einige spezielle Kollineationen des* R_4. 1923 Prof. Amsterdam.

Weyl, Hermann (9.11.1885 Elmshorn – 8.12.1955 Zürich)
Studierte in München und Göttingen, wo er 1908 über *Singuläre Integralgleichungen mit besonder Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems* bei Hilbert promovierte. 1913 erhielt er eine Professur in Zürich, 1930 ging er nach Göttingen. Ab 1933 arbeitete er am Institute for Advanced Study in Princeton.

1. H. Freudenthal, *Hermann Weyls Lebenswerk zugleich eine Besprechung der Herausgabe seiner gesammelten Abhandlungen*, Nieuw Arch. Wisk. (3) **19** (1971), 24–29

2. G. Pólya, *Eine Erinnerung an Hermann Weyl*, Math. Z. **126** (1972), 296–298

Wichmann, Wolfgang
Promovierte 1936 in Göttingen mit *Anwendungen der p-adischen Theorie im Nichtkommutativen* (F.K. Schmidt).

Witt, Ernst: (6.06.1911 Alsen – 3.07.1991)
Wuchs in China auf und kehrte erst mit 9 Jahren nach Deutschland zurück. Er

studierte in Freiburg und Göttingen, wo er 1934 mit *Riemann-Rochscher Satz und Z-Funktion im Hyperkomplexen* bei Emmy Noether promovierte. 1933–1938 Assistent bei Hasse in Göttingen. 1936 Habilitation mit *Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern*. 1938 Dozent in Hamburg, 1939 Professor.

1. I. Kersten, *Biography of Ernst Witt (1911–1991)*, Quadratic forms and their applications (Dublin, 1999), 155–171, Contemp. Math., 272, AMS 2000

2. I. Kersten, *Ernst Witt 1911 - 1991*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **95** (4) (1993), 166-180.

Zariski, Oscar (24.04.1899 Kobrin (Weissrussland) – 4.07.1986 Brookline)
Studierte 1918–1920 in Kiev, danach in Pisa und Rom, wo er 1925 bei Castelnuevo promovierte. 1927 emigrierte er in die USA, wo er von 1929 bis 1945 an der Johns Hopkins Universität lehrte. 1945 hielt er in Sao Paolo im wesentlichen Privatvorlesungen für André Weil; 1946 verbrachte er in Urbana Illinois, und ging danach als Professor nach Harvard.

1. D. Mumford, *Oscar Zariski: 1899–1986*, Notices Amer. Math. Soc. **33** (1986), no. 6, 891–894

2. C. Parikh, *The unreal life of Oscar Zariski*, Academic Press 1991

Zassenhaus, Hans (28.05.1912 Koblenz-Moselweiss – 21.11.1991 Columbus)
Promovierte 1934 in Hamburg mit *Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutations-Gruppen* bei Artin. Von 1934 bis 1936 arbeitete er in Rostock, danach wurde er Artins Assistent in Hamburg. 1938 Habilititation. 1943 erhielt er ein Angebot von der Universität Bonn, behielt sich aber eine Entscheidung bis nach dem Krieg vor. Zassenhaus blieb dann in Hamburg, ging 1948 nach Glasgow, 1949 nach Montreal, und 1959 an die Universität Notre Dame. 1964 nahm folgte er einem Ruf an die Ohio State University in Columbus, Ohio.

1. W. Plesken, *Hans Zassenhaus: 1912–1991*, Jahresber. DMV **96** (1994), no. 1, 1–20

2. M. Pohst,*In memoriam: Hans Zassenhaus (1912–1991)*, J. Number Theory **47** (1994), no. 1, 1–19

Zorn, Max (6.06.1906 Krefeld – 9.03.1993 Bloomington)
Promovierte 1930 in Hamburg mit *Theorie der Alternativen Ringe* bei Artin. Danach war Zorn Assistent in Halle bis zu seiner Emigration in die USA 1933. Arbeitete von 1934–1936 in Yale (dort hat er Zorns Lemma formuliert), danach an der UCLA bis 1946, und schließlich bis zu seiner Emeritierung 1971 an der Indiana University.

1. J. Ewing, *Max Zorn: 1906–1993*, Notices Amer. Math. Soc. **40** (1993), no. 6, 640

2. P. Halmos, *Postcards from Max*, Amer. Math. Monthly **100** (1993), no. 10, 942–944